Análisis

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f definida de la forma $f(x) = 1 + \mathrm{L}(2x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 1$. *(2 puntos)*

2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ *(5 puntos)*

   a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.
   b) Represente gráficamente esta función

3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   Estudie la continuidad y derivabilidad de f *(3 puntos)*

1) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* definida de la forma $f(x) = 1 + \mathrm{L}(2x-1)$ en el punto de abscisa *x* = 1.

Del punto de tangencia, donde la recta y la curva se tocan, conocemos x=1. La segunda coordenada de dicho punto, al ser un punto de *f*, será, por tanto: $f(1) = 1+\mathrm{L}(2–1) = 1 +\mathrm{L}1 = 1+0 = 1 \Rightarrow$ El punto es (1, 1)

Para la pendiente de la tangente, necesitamos la función derivada: $f'(x) = 0 + \dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{2}{2x-1} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{2}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$ será la pendiente, puesto que $x = 1$ es la primera coordenada del punto de tangencia.

Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la tangente será: $y – 1 = 2(x – 1) \Rightarrow y = 2x – 2 +1 \Rightarrow \boxed{y = 2x – 1}$

2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

1. Dominio. $\boxed{D(f) = \mathbb{R} – \{–2\}}$ porque –2 anula el denominador
2. Intersecciones con los ejes. OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x+1}{x+2} \Rightarrow 0 = x + 1 \Rightarrow -1 = x$, que es una solución válida, porque no anula el denominador de la ecuación inicial $\Rightarrow \boxed{(–1, 0)}$

   OY: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\left(0, \dfrac{1}{2}\right)}$
3. Asíntotas. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ es A. Hor.}}$

   Verticales: Sólo podría tenerlas en $x = –2$, que es el único punto de discontinuidad. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x+2} = \left(\dfrac{-1}{0}\right) = \infty \Rightarrow \boxed{x = –2 \text{ es A. Vert.}}$

   Oblicua: No puede tenerla, puesto que posee asíntota horizontal (saldría ésta, de nuevo, si intentásemos calcularla).
4. Monotonía. $f'(x) = \dfrac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

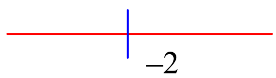
   Dividimos el D(*f*) en intervalos mediante:

   a) Discontinuidades de *f*: $x = –2$

   b) Discontinuidades de *f* ’: $x = –2$ (si anulamos el denominador de *f* ’ queda $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = –2$)

   c) $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$, que no es posible para ningún valor de x.

   La división en intervalos la hacemos con ayuda del gráfico:



   Resulta el siguiente cuadro:

	(0, 2)	2	(2, +∞)
f ’	+	∄	+
f	↗	∄	↗

A la vista de este resultado, concluimos que no existen extremos relativos.

5. Curvatura. No nos la piden, pero la vamos a calcular (en general, en un examen real no debe contestarse a lo que no se pregunte, si bien en este caso lo que hacemos es completar la información disponible para dibujar la gráfica). Comenzamos por calcular la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{0-2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

a) Discontinuidades de f : $x = –2$
b) Discontinuidades de f”: $x = –2$
c) f”$(x) = 0 \Rightarrow –2 = 0$ que no es posible.

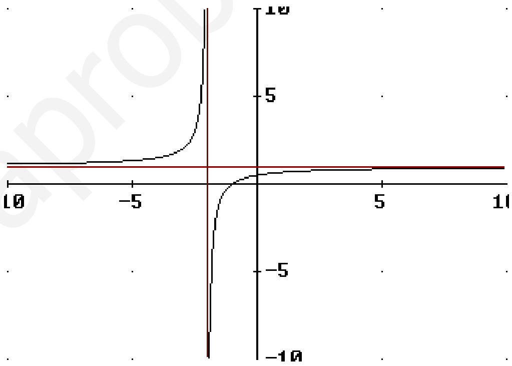
La división en intervalos es la misma que antes, por lo que resulta:

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2, +\infty)$
f''	+	$\nexists$	–
f	$\cup$	$\nexists$	$\cap$

No tiene puntos de inflexión: sería, en todo caso, $x = –2$, pero resulta que no es un punto del dominio.

d) Represente gráficamente esta función

Combinando los resultados anteriores, se obtiene la gráfica adjunta.



3) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudie la continuidad y derivabilidad de *f*

Continuidad.

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con $y = 2^x$. Las exponenciales con continuas en todo $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f es continua en todo el intervalo.
- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y = 2/x$, cuya única discontinuidad está en $x = 0$, que no pertenece al intervalo $\Rightarrow$ f es continua, también, en todo el intervalo.
- $x = 1$: Los puntos que separan distintas zonas de definición de las funciones definidas a trozos siempre se estudian por separado:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 \qquad f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f$ es continua en $x = 1$

Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que puede ser derivable

.Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \mathrm{L}2 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ porque podemos derivar directamente en intervalos abiertos.

Para el punto que separa las zonas de definición, vemos los límites laterales de esta función:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2\,\mathrm{L}2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

Como no coinciden, no puede ser derivable la función f en $x = 1$.