Análisis

1) Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1{,}5t^2+168t-954$
   a) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio? *(3 puntos)*
   b) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo. *(1,5 puntos)*

2) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$
   a) Dibuje la gráfica de esta función *(1,5 puntos)*
   b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos *(4 puntos)*

Soluciones

1) **Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función $B(t) = -1{,}5t^2+168t-954$**

a) **Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio?**

El problema es muy simple, puesto que la función es una parábola abierta hacia abajo, es decir, con máximo, ya que el coeficiente de t^2 es negativo. Simplemente hallando las coordenadas del vértice, contestamos el apartado *a* del problema, y con las intersecciones con OX tendremos el *b*.

Pues bien. La ecuación del eje es: $x = -\dfrac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \dfrac{-168}{2(-1{,}5)} \Leftrightarrow x = 56$

El vértice, por tanto, es: $B(56) = -1{,}5 \cdot 56^2+168 \cdot 56-954 = 3750 \Rightarrow (56, 3750)$

Por tanto, el máximo absoluto se obtiene para t=56 minutos, cifrándose en 3.750 millones.

Esta forma de resolución es absolutamente correcta. Con el único objeto de recordarlo, vamos a hacerlo por el método general. Para empezar, vamos a volvernos rigurosos y delimitamos el intervalo de actuación de la función. Éste será desde 0 minutos diarios hasta 24 horas por 60 minutos cada hora igual a 1.440 minutos diarios máximo. Es decir, que Dom(B) = [0, 1.440]. Comparamos, entonces, las imágenes (o límites) en:

a) Extremos del intervalo de definición: $B(0) = -954$; $B(1.440) = -2.869.434$
b) Discontinuidades de B y/o de B': No tiene (la función es un polinomio)
c) $B'(t)=0 \Leftrightarrow -3t+168 = 0 \Leftrightarrow 3t=168 \Leftrightarrow t=56$. Imagen: $B(56)=3.750$

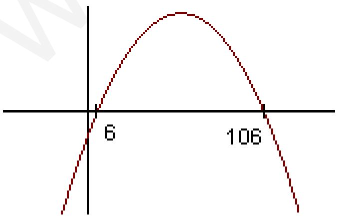
Por tanto, el mínimo absoluto (que no nos lo piden) se alcanza para t=1.440 y su valor es de –2.869.434 (mínima imagen/límite de entre los puntos estudiados), y el máximo absoluto está en t=56 y vale 3.750 (máxima imagen/límite entre los puntos estudiados). La respuesta es la que obtuvimos antes, evidentemente.

b) **Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficio positivo.**

Responder a esta cuestión consiste en interpretar la gráfica. Para completarla, necesitamos las intersecciones con OX:

$B(t)=0 \Leftrightarrow -1{,}5t^2+168t-954=0 \Leftrightarrow$ (multiplicamos los dos miembros por –2 para eliminar decimales y hacer que el coeficiente de la máxima potencia sea positivo):

$$3t^2-336t+1908=0 \Leftrightarrow t = \frac{336 \pm \sqrt{112896-22896}}{6} = \frac{336 \pm 300}{6} = \begin{cases} =106 \\ =6 \end{cases}$$



La gráfica es, consiguientemente, la adjunta. A la vista de ella, se concluye que los valores de t que hacen que la y (el beneficio) sea mayor que 0 estrictamente son:

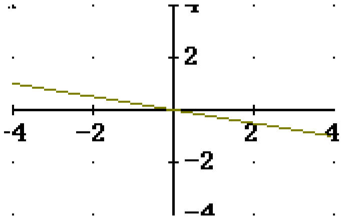
$t \in (6, 106)$

Es decir, hay beneficio positivo con más de 6 minutos de publicidad y menos de 106 diarios.

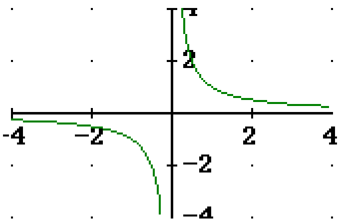
2) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{4} & \text{si } 0\le x\le 2\\[2mm] -\dfrac{1}{x} & \text{si } 2<x\end{cases}$

a) Dibuje la gráfica de esta función

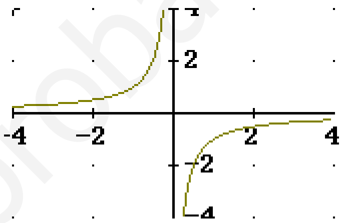
En [0, 2] la función es un trozo de la recta $y=-\dfrac{x}{4}$:



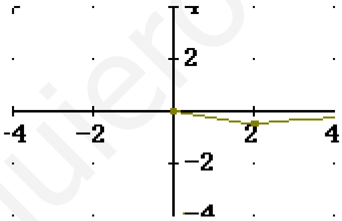
En (2, +∞) es la hipérbola equilátera $y=\dfrac{1}{x}$ cambiada de signo:



Se transforma en ⇒



Luego la gráfica es:



b) Estudie su continuidad, asíntotas, monotonía y extremos

Continuidad

- [0, 2): $f(x)=-\dfrac{1}{4}x$ que no tiene discontinuidades (es polinómica) ⇒ Continua en todo el intervalo.
- (2, +∞): $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, continua salvo en x=0, que anula el denominador, pero que no pertenece a (2, +∞) ⇒ Continua en todo el intervalo.
- x=2: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}$ ⇒ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\dfrac{1}{2} = f(2)$ ⇒ Es continua.

Luego es continua en todo [0, +∞)

Asíntotas

No tiene asíntotas verticales, porque no hay discontinuidades. Por el lado de la recta, no tiene asíntotas. Por el lado de la hipérbola, calculamos asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0 \;\Rightarrow\;$ $y=0$ es asíntota horizontal por el lado del $+\infty$. Por tanto, no tiene oblicua.

Monotonía y extremos

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4} & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } 2<x \end{cases} \qquad \text{y } \nexists f'(2) \text{ porque } f'(2^-)\neq f'(2^+)$$

- Discontinuidades de f: No tiene
- Discontinuidades de f ': $x=2$
- Puntos que anulan f ': No hay, porque $-\frac{1}{4}=0$ no es posible y $\frac{1}{x^2}=0$ requiere que $1=0$, luego tampoco es posible.

Por tanto:

	(0, 2)	2	(2, $+\infty$)
f '	–	$\nexists$	+
f	↘	–1/2	↗

Luego tiene un mínimo relativo en (2, –1/2), ya que antes es decreciente y luego creciente, y la función tiene imagen para $x=2$.