

ASÍNTOTAS. EJERCICIOS RESUELTOS

1) Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$.

• Asíntotas horizontales

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Le damos un valor lo suficientemente elevado ($x \rightarrow +\infty$).

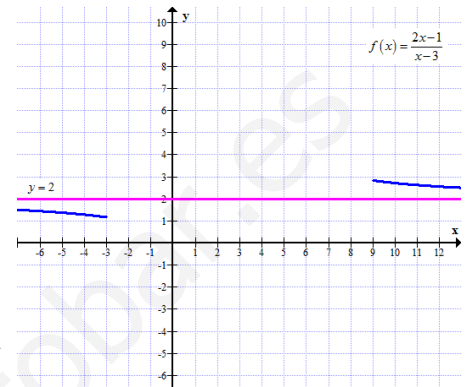
$$f(100) = \frac{2 \cdot 100 - 1}{100 - 3} = \frac{199}{97} \approx 2.0515 > 2$$

Por lo tanto, por la derecha ($x \rightarrow +\infty$), la curva está por encima de la asíntota.

Le damos un valor lo suficientemente bajo ($x \rightarrow -\infty$).

$$f(-100) = \frac{2 \cdot (-100) - 1}{-100 - 3} = \frac{-201}{-103} = \frac{201}{103} \approx 1.9515 < 2$$

Por lo tanto, por la izquierda ($x \rightarrow -\infty$), la curva está por debajo de la asíntota.



• Asíntotas verticales

Las funciones racionales pueden tener asíntotas verticales en los valores que anulen a su denominador.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

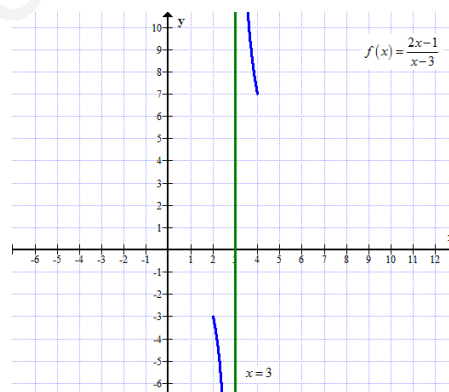
Estudiamos los límites laterales en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

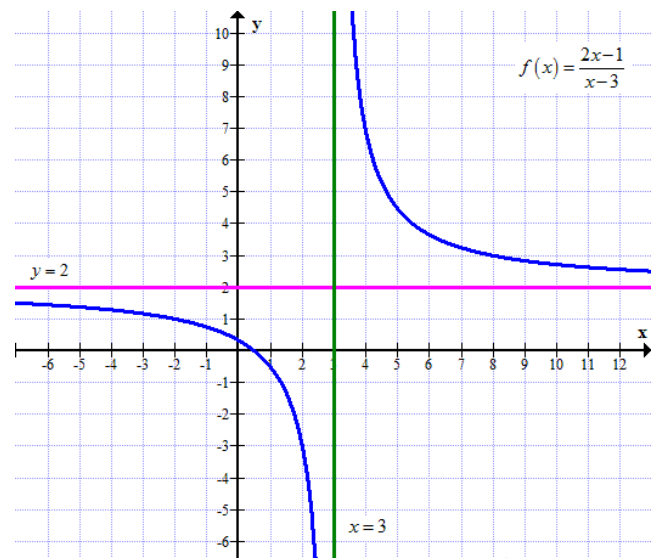
Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales



• Asíntotas oblicuas

No tiene por tener asíntotas horizontales por ambos lados.



2) Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

• Asíntotas horizontales

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Le damos un valor lo suficientemente elevado ($x \rightarrow +\infty$).

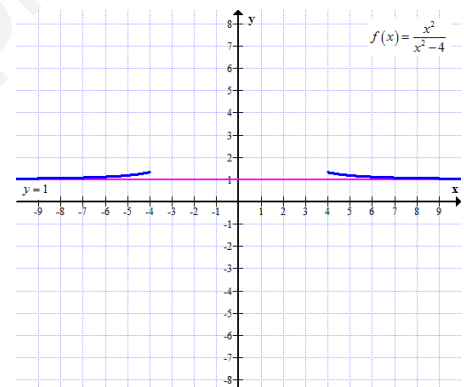
$$f(10) = \frac{10^2}{10^2 - 4} = \frac{100}{96} = \frac{25}{24} \approx 1,0417 > 1$$

Por lo tanto, por la derecha ($x \rightarrow +\infty$), la curva está por encima de la asíntota.

Le damos un valor lo suficientemente bajo ($x \rightarrow -\infty$).

$$f(-10) = \frac{(-10)^2}{(-10)^2 - 4} = \frac{100}{96} = \frac{25}{24} \approx 1,0417 > 1$$

Por lo tanto, por la izquierda ($x \rightarrow -\infty$), la curva está por encima de la asíntota.



• Asíntotas verticales

Posibles asíntotas verticales

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2$$

Estudiamos los límites laterales en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales

$$x = -2$$

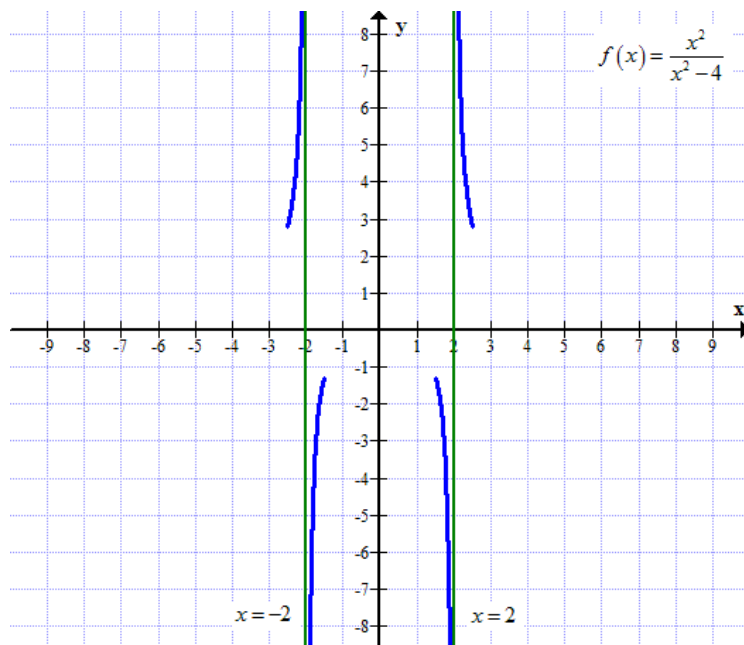
Estudiamos los límites laterales en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

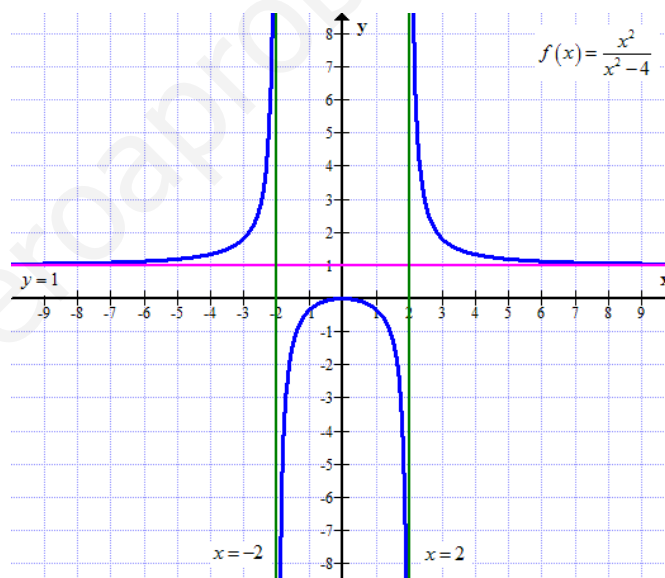
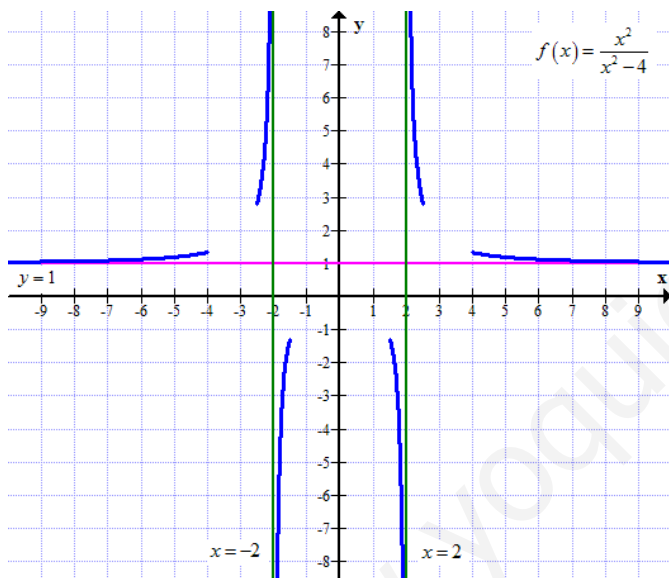
Posición de la curva respecto de la asíntota

Queda determinada por los límites laterales



- Asíntotas oblicuas

No tiene por tener asíntotas horizontales por ambos lados.



3) Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.

- Asíntotas horizontales

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ no tiene asíntotas horizontales}$$

Como no tiene asíntotas horizontales, puede tener asíntotas oblicuas.

- Asíntotas verticales

Posible asíntota vertical

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Estudiamos los límites laterales en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical de } f$$

(por ambos lados)

Posición de la curva respecto de la asíntota
Queda determinada por los límites laterales

• Asíntotas oblicuas

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 4}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$$

Por lo tanto,

$y = x + 1$ es una asíntota oblicua de f por ambos lados

Posición de la curva respecto de la asíntota

Comparamos la función $f(x)$ con la asíntota $a(x) = x + 1$

Le damos un valor lo suficientemente elevado ($x \rightarrow +\infty$).

$$\left. \begin{aligned} f(10) &= \frac{10^2 - 4}{10 - 1} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3} \approx 10,6667 \\ a(10) &= 10 + 1 = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(10) < a(10)$$

Por lo tanto, por la derecha ($x \rightarrow +\infty$), la curva está por debajo de la asíntota.

Le damos un valor lo suficientemente bajo ($x \rightarrow -\infty$).

$$\left. \begin{aligned} f(-10) &= \frac{(-10)^2 - 4}{-10 - 1} = \frac{96}{-11} \approx -8,7273 \\ a(-10) &= -10 + 1 = -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-10) > a(-10)$$

Por lo tanto, por la izquierda ($x \rightarrow -\infty$), la curva está por encima de la asíntota.

