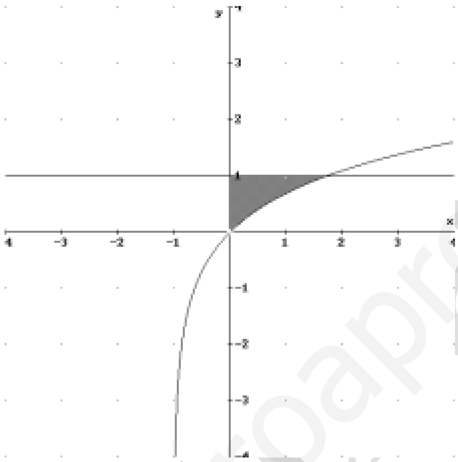
Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OY y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.
b) Halla el área del recinto anterior
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ y=\ln(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(x+1)=1 \Rightarrow e^1=x+1 \Rightarrow x=e-1 \Rightarrow A=(e-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\ln(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y=\ln 1=0 \Rightarrow B=(0,0)$$

b) Vamos a calcular la integral $I_1=\int ln(x+1)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-I_2$$

La integral $I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx$ es una integral racional

$$I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx=\int\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)dx=x-ln(x+1)$$

Sustituyendo, nos queda: $I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-x+ln(x+1)$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$A=\int_0^{e-1}\left(1-ln(x+1)\right)dx=\left[x-x\cdot ln(x+1)+x-\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=e-2\ u^2$$

Halla: $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^{x}$
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$e^{x}=t \Rightarrow e^{x}dx=dt$

$$\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx=\int \frac{1}{(t^{2}-1)(t+1)}\,dt=\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^{2}}=\frac{A(t+1)^{2}+B(t-1)(t+1)+C(t-1)}{(t-1)(t+1)^{2}}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B y C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \Rightarrow 1=-2C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$t=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{4}-B+\frac{1}{2} \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt=\int \frac{\frac{1}{4}}{t-1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{4}}{t+1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^{2}}\,dt=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(e^{x}-1)-\frac{1}{4}\ln(e^{x}+1)+\frac{1}{2(e^{x}+1)}+C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\frac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+C$$

$$f(x)=\int (\ln x+C)\,dx=x\ln x-x+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(1,1)\Rightarrow 1=1\cdot\ln 1-1+C+D\Rightarrow D=2$

- Tangente horizontal $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=\ln 1+C\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\ln x-x+2$

Calcula $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\int x\,dx+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1\,;\; x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 2=3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)}\,dx+\int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Calcula el valor de $b>0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{x}=bx \Rightarrow x=b^2x^2 \Rightarrow b^2x^2-x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=\frac{1}{b^2}$$

$$A=\frac{4}{3}=\int_0^{\frac{1}{b^2}}\left(\sqrt{x}-bx\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{bx^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{b^2}}=\frac{2\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{b\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{2}=\frac{2}{3b^3}-\frac{1}{2b^3}=\frac{1}{6b^3}\Rightarrow b^3=\frac{1}{8}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(1-\ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-\ln x;\ du=-\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$I=\int x(1-ln\,x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot(1-ln\,x)-\int-\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}ln\,x+\frac{1}{4}x^2+C=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}ln\,x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,1)$.

$$F(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}ln\,x+C\Rightarrow 1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}ln1+C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}ln\,x+\dfrac{1}{4}$

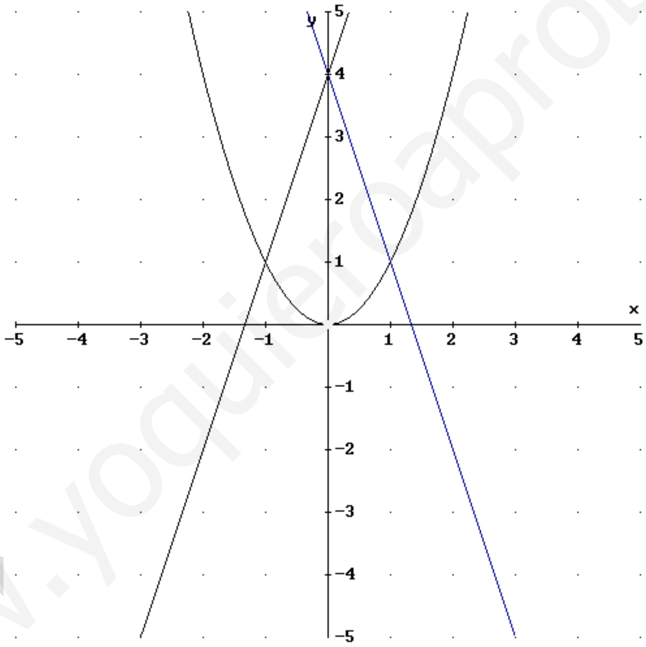
Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=4-3|x|$ y $g(x)=x^2$.
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*. Determina sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f*.

$$f(x)=4-3|x|=\begin{cases}4+3x & si \quad x<0\\ 4-3x & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Las dos funciones son fáciles de representar. Su dibujo es:



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

Si $x<0$, entonces: $x^2=4+3x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=4$; $x=-1$. Sólo nos interesa la solución negativa $x=-1$.

Si $x>0$, entonces: $x^2=4-3x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x=1$; $x=-4$. Sólo nos interesa la solución positiva $x=1$.

Luego, los puntos de corte son: $(-1,1)$ y $(1,1)$.
b) El área de la región pedida es:

$$A=2\int_0^1(4-3x-x^2)\,dx=2\cdot\left[4-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\cdot\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}\,u^2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos primero la integral por partes

$$\int x\cdot\cos x\, dx = x\cdot sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\cdot sen\, x + \cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ \ du = dx \\ dv = \cos x\, dx;\ v = sen\, x \end{array}}$$

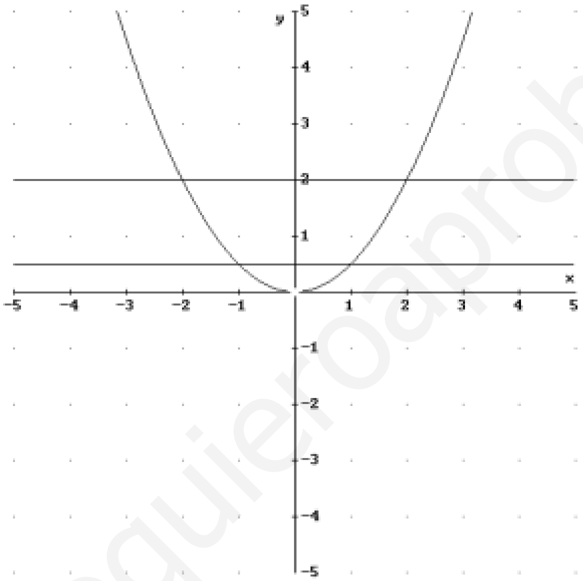
Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\, dx = \left[x\cdot sen\, x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Calcula un número positivo *a*, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y=a$ e $y=2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=2$.

$$Área=2\cdot\int_0^2(2-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\cdot\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=2\cdot\left[4-\frac{8}{6}\right]=\frac{16}{3}\ u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=a$.

$$x^2=2a\Rightarrow x=\pm\sqrt{2a}$$

$$A=2\cdot\int_0^{\sqrt{2a}}(a-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2a}}=2\cdot\left[a\sqrt{2a}-\frac{2a\sqrt{2a}}{6}\right]=\frac{4}{3}a\sqrt{2a}$$

Se tiene que cumplir que: $\frac{16}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=\frac{14}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{4a\sqrt{2a}}{3}\Rightarrow 1=2a\sqrt{2a}\Rightarrow 1=8a^3\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$
a) Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para ver que las rectas son tangentes a la parábola tenemos que comprobar que sólo se cortan en un punto.
Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=-x+1$

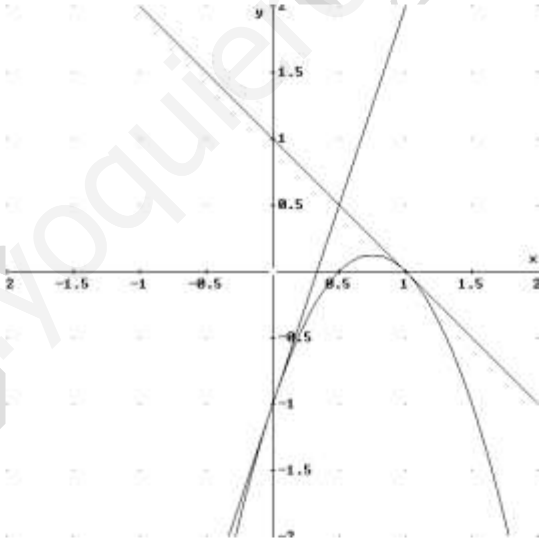
$$-2x^2+3x-1=-x+1\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow x=1$$

Luego es tangente.

Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=3x-1$

$$-2x^2+3x-1=3x-1\Rightarrow 2x^2=0\Rightarrow x=0$$

Luego es tangente.
b) Hacemos un dibujo para ver más claramente el área que nos piden.



$$Área=\int_0^{\frac{1}{2}}(3x-1+2x^2-3x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(-x+1+2x^2-3x+1)\,dx=$$

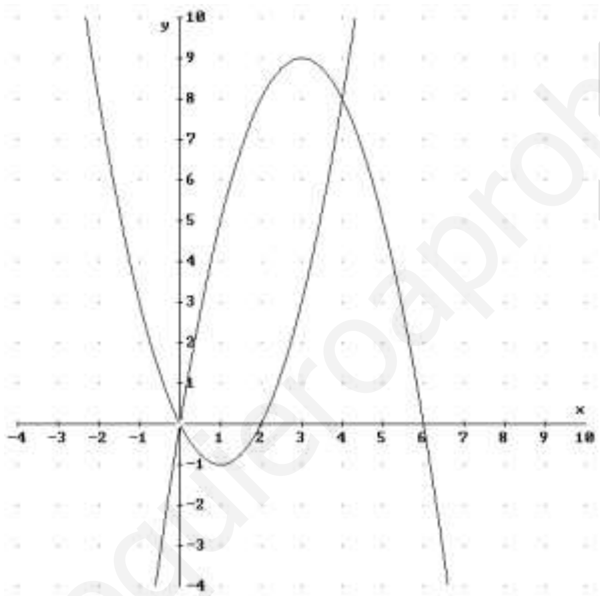
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^2)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(2x^2-4x+2)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right]_{\frac{1}{2}}^1=$$

$$=\left[\frac{1}{12}\right]+\left[\frac{2}{3}-2+2\right]-\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+1\right]=\frac{1}{6}\,u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son fáciles de dibujar, ya que son dos parábolas. Basta con hacer una tabla de valores calculando previamente el vértice de cada una de ellas.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 \left[8x - 2x^2\right] dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \left[64 - \frac{128}{3}\right] = \frac{64}{3} \ u^2$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.
b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

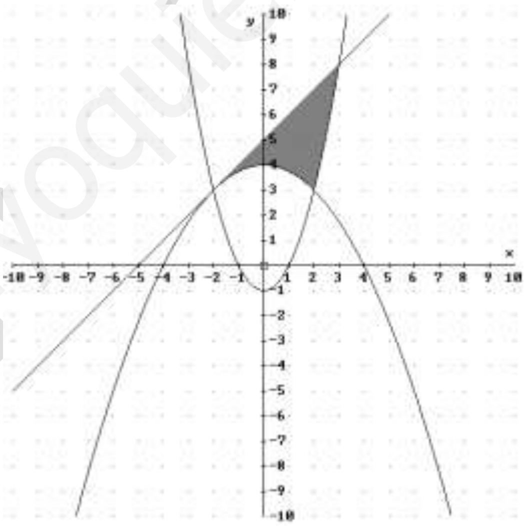
a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x+2)$

$$f(-2) = -\frac{1}{4}\cdot 4 + 4 = 3$$

$$f'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'(-2) = 1$$

Luego, $y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x+2) \Rightarrow y - 3 = 1\cdot(x+2) \Rightarrow y = x + 5$

b) Dibujamos las dos parábolas y la recta tangente.



Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-2}^{2}\left[(x+5) - \left(-\frac{x^2}{4} + 4\right)\right]dx + \int_{2}^{3}\left[(x+5) - (x^2 - 1)\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\frac{x^2}{4} + x + 1)\right]dx + \int_{2}^{3}\left[-x^2 + x + 6\right]dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{2}^{3} = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2}\ u^2$$