

5



LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES

- 1** Determina, si existe, el límite en $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: 1

- 2** Calcula, si existe, el límite en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sol: 7

- 3** Escribe la ecuación de la asíntota vertical de la función propuesta en el ejercicio anterior.

Sol: $x = 0$.

- 4** Dada la función $f(x) = \frac{3-x}{(x-1)^2}$, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Sol:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(x-1)^2} = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

- 5** Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|}$

Sol: 1

- 6** Determina los límites laterales de la función

$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \text{ en } x = -1.$$

$$\text{Sol: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1$$

- 7** Calcula, si las hay, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

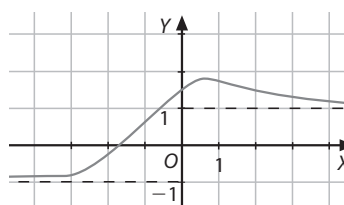
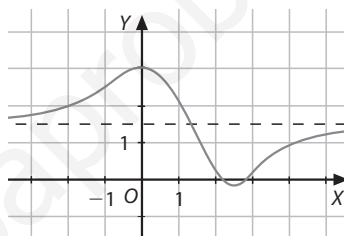
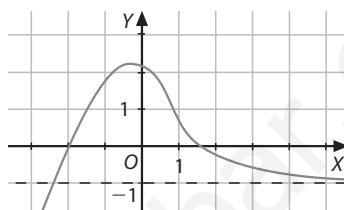
a) $x = 1$ y $x = -1$.

b) No tiene asíntotas verticales.

c) $x = 1$.

d) $x = 1$.

- 8** Indica las asíntotas horizontales de las funciones de las figuras.



a) Por la derecha: $y = -1$

b) $y = 1,5$

c) Por la izquierda: $y = -1$, por la derecha: $y = 1$

- 9** Halla las ecuaciones de las asíntotas horizontales de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{1-|x|}$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$

a) $y = -2$.

d) $y = 0$

b) $y = \frac{3}{2}$

e) $y = 1$

c) $y = 0$

f) Por la izquierda $y = -1$, por la derecha $y = 1$.

10 Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.

a) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, f(3) = 3, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2, f^{-1}(0) = \{0, 2\}$$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, Rec $f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$

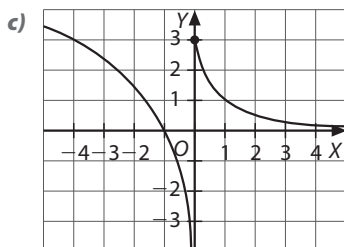
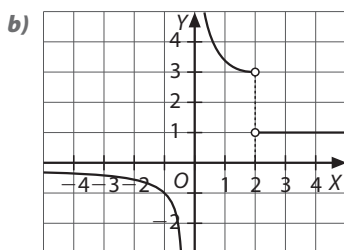
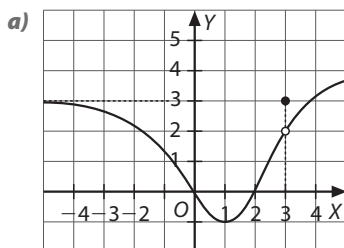
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y que $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

c) Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



11 Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que consideres más adecuado.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{\sqrt{x^2 + 5x} - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{5x^2 - 2} \right)^{\frac{x-1}{2}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x} - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$

m) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x-6)^2}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x^2 + x - 2}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow 1/2} e^{\frac{1}{2x-1}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2}$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 3x}{2^x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{2x-1}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2 - 1}{3} \right)^{\frac{1}{x+1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)^{1/x}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{2x}$

a) 1

k) 2

b) 0

l) e^2

c) $+\infty$

m) 0

d) $5\sqrt{2} - 5$

n) $2\sqrt{6}$

e) 1

ñ) $\sqrt{2}$

f) -2

o) $+\infty$

g) $\frac{1}{4}$

p) $e^{-\frac{1}{3}}$

h) 3

q) 0

i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\frac{3}{4}$

12 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = E(x)$, en $x = \frac{2}{3}$ y en $x = 1$.

b) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-2x}$, en $x = 0$ y en $x = 2$.

c) $f(x) = 4 - \ln x$, en $x = 0$ y en $x = 4$.

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$, en $x = 1$.

a) En $x = \frac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua.

b) En $x = 0$ y en $x = 2$ no existe imagen.

c) En $x = 0$ no es continua, en $x = 4$ es continua.

d) No es continua, puesto que no está definida en $x = 1$.

13 Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.

Sol: En **b)** se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ y en **d)**

14 Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

f) $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$. Es continua en su dominio.

b) Es continua en \mathbb{R} .

c) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. La función es continua en su dominio.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

f) Dom $f = (-1, -1/2) \cup (-1/2, 1)$. La función es continua en su dominio.

- 15 ■■■ Estudia para qué valores de a son continuas en \mathbb{R} estas funciones.

$$a) f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ (1-a)x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \frac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1+a^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2+a) & \text{si } x > 0 \quad (a > 0) \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) $a = -3$.

b) $a = 1$

c) $a = e^2$.

d) $a = 2$.

- 16 ■■■ Clasifica las discontinuidades de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

Sol: Discontinuidad evitable en $x = 0$.

Discontinuidad asintótica en $x = -1$.

Discontinuidad asintótica en $x = 1$.

- 17 ■■■ Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 14. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.

a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.

b) No hay discontinuidades.

c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.

d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, f es continua en $(-\infty, 2)$.

e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.

f) En $x = 1$ y $x = -1$, discontinuidad asintótica y esencial. En $x = -1/2$, discontinuidad asintótica.

- 18 ■■■ Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax - 2x}$ averigua a y b sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.

Sol: $b = 2$; $a = 3$

En $x = 0$, discontinuidad asintótica.

En $x = -\frac{1}{2}$ discontinuidad asintótica

Cálculo de límites

- 19 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{(x - 2)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 1}{x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{(x - 2)^2 x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x}{x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 4}$

a) 0

b) 12

c) $\frac{2}{3}$

d) $+\infty$

e) ∞

f) ∞

g) ∞

h) 0

- 20 ■■■ Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{6x+4}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \left(\frac{2x+1}{2x+2} \right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2-3} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1/3} \left(\frac{2}{1-x} \right)^{\frac{x}{3x-1}}$

a) $\frac{1}{2}$

c) 1

b) -6

d) $\frac{1}{3}$

- 21 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{3 - \sqrt{6+x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+3}{\sqrt{5x^2+x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

a) -2

d) -48

b) $\frac{1}{8}$

e) 0

c) 0

f) $\frac{1}{4}$

22 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - x^2}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 + 3}}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 - x^2}$
 a) $-\infty$ e) $\sqrt{2}$
 b) $+\infty$ f) $-\sqrt{2}$
 c) \exists g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 d) 0

23 ■■■ Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)]$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)]$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} \right)^{\sqrt{x^2 + 1} - x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + x} \right)^{\sqrt{x^2 + 1} - x}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x)$
 f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x)$
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$
 h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$
 i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x})$
 j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2 + x}}{x + 1}$
 a) -1 f) $+\infty$
 b) $+\infty$ g) 0
 c) 1 h) 0
 d) $+\infty$ i) 1
 e) 1 j) $\frac{3}{2}$

24 ■■■ Estudia el comportamiento de la siguiente función en los extremos de su dominio: $f(x) = |2 - 2^x|$

Sol: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 2$.

25 ■■■ Calcula los límites cuando $x \rightarrow -1$ y $x \rightarrow 0$ de la siguiente función y encuentra sus asíntotas.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x^2 + x|}$$

Sol: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

Por tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Por tanto, en $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

Por consiguiente, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

26 ■■■ Calcula los límites siguientes.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x - 5}{x + 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}}$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{\sqrt{2x^2 + 1} - x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$
 a) \exists
 b) 1
 c) e^{-2}

27 ■■■ Calcula el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + ax} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \sqrt{2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}} = \frac{1}{e^3}$
 a) $a = -2$
 b) $a = 4$
 c) $a = -3$

Continuidad de una función en un punto

28 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.

a) $f(x) = \ln |x + 1|$ h) $f(x) = \log(1 - x^2)$
 b) $f(x) = \frac{x + 1}{2x^2 + x - 1}$ i) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2(x + 1)}$
 c) $f(x) = \frac{|2x + 1|}{2x^2 - x - 1}$ j) $f(x) = \frac{2^{1/x}}{1 + x}$
 d) $f(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 3}$ k) $f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$
 e) $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ l) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
 f) $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$ m) $f(x) = \frac{|x| - 1}{x^2 - |x|}$
 g) $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$ n) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2 + 2}}}{x^2 - 1}$

a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. La discontinuidad en $x = -1$ es asíntota.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1/2\}$,

En $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

En $x = 1/2$, la discontinuidad es asíntota.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$.

En $x = -1/2$, la función presenta una discontinuidad de salto.

En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, -3\}$.

La discontinuidad es asíntota en ambos puntos.

e) La función es continua en \mathbb{R} .

f) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asíntota.

g) La función es continua en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad evitable.

h) La función es continua en el intervalo $(-1, 1)$.
 En $x = -1$ se tiene una discontinuidad asintótica y esencial en ese valor. En $x = 1$ la situación es análoga pero simétrica.

i) Es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
 En $x = 0$ y en $x = -1$ la discontinuidad es asintótica.

j) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
 En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad esencial, asintótica por la derecha.
 En $x = -1$, la discontinuidad es asintótica.

k) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
 En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

l) Es continua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.
 En $x = 1$, la discontinuidad es asintótica.
 No hay asíntota en $x = 0$.

m) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, y en $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades evitables.
 En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

n) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$.
 En $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades asintóticas.
 En $x = -2$ se obtiene también una discontinuidad asintótica, aunque solo por la derecha.

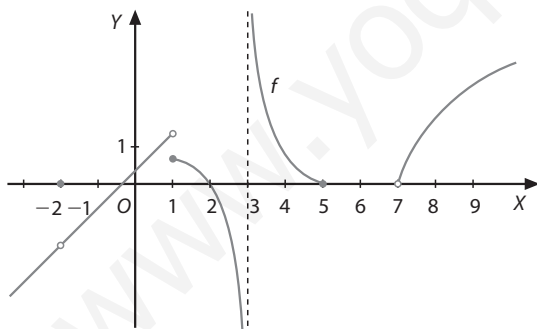
29 Determina en qué casos es posible salvar la discontinuidad, cuando existan, en cada una de las funciones de la actividad anterior.

Sol: En la función de la actividad b) se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, imponiendo que $f(-1) = -1/3$.

En la función de la actividad g) se puede evitar la discontinuidad en el punto $x = 0$, imponiendo que $f(0) = 1$.

En la función de la actividad m) se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, tomando $f(-1) = 1$, y también en $x = 1$, tomando $f(1) = 1$.

30 A partir de su representación gráfica, clasifica las discontinuidades de la función f:



Sol: $\text{Dom } f = (-\infty, 3) \cup (3, 5] \cup (7, +\infty)$

Discontinuidad evitable: $x = -2$

Discontinuidad de salto: $x = 1$

Discontinuidad asintótica: $x = 3$

Discontinuidad esencial no asintótica: $x = 5$ y $x = 7$

31 Averigua, en cada uno de los siguientes casos, el valor que debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él.

a) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{3 - 3x^2}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \frac{2 - \sqrt{4-x}}{3x}$ en $x = 0$

d) $f(x) = \left(2 - \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ en $x = 0$

e) $f(x) = \frac{2 - 2\sqrt{x+2}}{x+1}$ en $x = -1$

f) $f(x) = \left(\frac{x^2 + x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ en $x = 1$

g) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-1/x^2}}$ en $x = 0$

a) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial que no es posible evitar.

e) -1

f) $\sqrt[4]{e^3}$

g) 1

32 Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{4-x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - x + 1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln|x-1| & \text{si } x < 0 \\ \frac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{25-x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x + \ln(x+1)}{20x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Para $x < 2$ la función es continua.
Para $x > 2$, la función es continua.
 f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.
- b) Para $x < 1$, la función es continua.
Para $x > 1$, la función es continua.
La discontinuidad en $x = 1$ es de salto finito.
- c) La función es continua en \mathbb{R} .
- d) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.
La discontinuidad en $x = 0$ es de salto.
En $x = 2$ la discontinuidad que presenta también es de salto.
- e) Para $x < 0$, la función es continua.
Para $x > 0$, la función es continua.
La discontinuidad en $x = 0$ es asíntótica.
- f) Para $x < 0$, la función es continua.
Para $x > 0$, la función es continua.
La discontinuidad es evitable en $x = 0$.

33 ■■■ Estudia para qué valores de a , o de a y b , son continuas estas funciones en los puntos que se indican.

- a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$
- b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+2ax+a & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$
- d) $f(x) = \begin{cases} E(x^2)+1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2-a}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$
- e) $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si } x < 0 \\ x-a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x}+b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = 1$
- a) $a = 1$
b) $a = 4$
c) $a = \frac{1}{2}$
d) $a = 4$
e) $a = 1, b = -1$

34 ■■■ Halla a sabiendo que $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^3-32}{x-4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Sol: $a = 8$

35 ■■■ Calcula a para que $f(x) = \frac{-2x^2+ax+1}{2x^2+5x+2}$ tenga en $x = -\frac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.

Sol: $a = 1$

En $x = -2$, la discontinuidad es asíntótica.

Continuidad de una función en un intervalo

36 ■■■ Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 2-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $(0, 1)$ y $[0, 1]$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $[0, 3]$

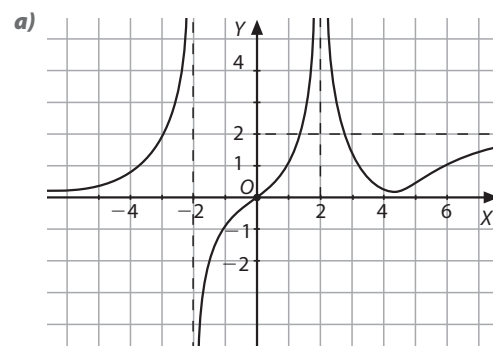
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $[-1, 0]$

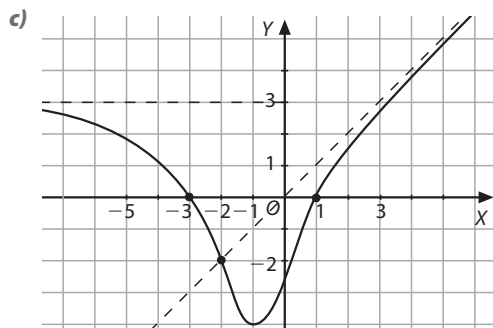
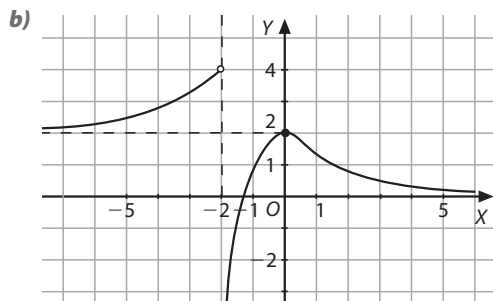
- a) f es continua en $(0, 1)$.
Pero no es continua en $[0, 1]$.
- b) No es continua en $x = 1$.
- c) f no es continua en $x = 0$

Ejercicios de aplicación

37 ■■■ Construye gráficas de funciones que cumplan los siguientes requisitos.

- a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $\text{Rec } f = \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 $f(0) = 0$
 $f > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$
 $f < 0$ en $(-2, 0)$
- b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $\text{Rec } f = (-\infty, 4)$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$
Asíntota horizontal por la izquierda: $y = 2$
Asíntota horizontal por la derecha: $y = 0$
Máximo relativo en $x = 0$
- c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 $f^{-1}(0) = \{-3, 1\}$ $f(-2) = -2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$
Mínimo relativo en $x = -1$





38 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Sol: $a = -3$ y $b = 0$.

39 Dada la función: $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

a) Determina a y b sabiendo que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.

b) Define una función $g(x)$ que sea continua en $x = 1$ y que coincida en el dominio de definición de esta. Razona las respuestas.

a) $a = -4$, $b = 4$

b) $g(x) = \frac{-4 - 4x}{x^2 - 7x - 3}$

40 Di cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona por qué:

a) Si una función f está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es continua en dicho intervalo.

b) Si una función f no está acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces no es continua en dicho intervalo.

Sol: Es cierta la segunda afirmación.

41 Sea f una función cuyo dominio es \mathbb{R} . Si f toma todos los valores comprendidos entre $f(-2)$ y $f(2)$, ¿se puede afirmar que la función f es continua en $[-2, 2]$?

Sol: No se puede afirmar.

42 Si una función f alcanza en el intervalo $[a, b]$ sus extremos absolutos, m y M , y toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre m y M , razona si esta condición es suficiente para asegurar que f es continua en $[a, b]$.

Sol: No.

1. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2 - \frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{-3x^2 + 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x}{2x - x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

a) 0

b) $\frac{1}{4}$

c) $e^{-\frac{1}{2}}$

d) -1

e) 0

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 4x - 2}}{1 + x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x - \sqrt{2x^2 + 1}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x^2 - 8}{x - 3}$

f) $-\sqrt{3}$

g) $-\infty$

h) 0

i) 1

j) $+\infty$

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{3 - 3x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2 - 2x^{1/x}}$

a) $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.c) La función es continua en $(0, 1) \cap (0, +\infty)$.3. Encuentra los valores de a para que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[-2, -1]$.

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - a & \text{si } x < -1 \\ (x - a)^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Sol: $a_1 = -1$ y $a_2 = -2$ 4. Halla el valor de a y de b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - bx + a & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Sol: $b = 1/2$, independientemente del valor que tome a .