$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx \qquad\qquad \text{Sol: } \operatorname{Ln}\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+k$$

Tenemos una integral de tipo racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Vamos a descomponer el integrando en fracciones simples:

$$(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \text{(raíces reales simples)}$$

Entonces:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Vamos a calcular los coeficientes indeterminados. Al ser los denominadores iguales, los numeradores también lo serán. Por tanto:

$$2x-1=A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1 \\ x=2 \rightarrow 3=B \quad \Rightarrow B=3 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=-\int \frac{1}{x-1}dx+3\int \frac{1}{x-2}dx=$$

$$=-\operatorname{Ln}(x-1)+3\operatorname{Ln}(x-2)+k=\operatorname{Ln}\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+k$$

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)} \qquad\qquad \text{Sol: } \frac{1}{8}\operatorname{Ln}\left|\frac{(x+3)^6}{(x+1)(\quad 5)^5}\right|+k$$

Tenemos una integral de tipo racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Vamos a descomponer el integrando en fracciones simples:

$$(x+1)(x+3)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \\ x=-5 \end{cases} \quad \text{(raíces reales simples)}$$

Entonces:

$$\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}=$$

$$=\frac{A(x+3)(x+5)+B(x+1)(x+5)+C(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)}$$

Para calcular los coeficientes indeterminados, al ser los denominadores iguales, los numeradores también lo serán. Por tanto:

$$\boldsymbol{x = A(x+3)(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+1)(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow -1 = 8A \Rightarrow A = -\frac{1}{8} \\ x = -3 \rightarrow -3 = -4B \;\; \Rightarrow B = \frac{3}{4} \\ x = -5 \rightarrow -5 = 8C \Rightarrow C = -\frac{5}{8} \end{cases}}$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x+3} + \frac{-\frac{5}{8}}{x+5} \right) dx =}$$

$$\boldsymbol{= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{5}{8}\int \frac{1}{x+5}dx = -\frac{1}{8}\mathrm{Ln}(x+1) + \frac{3}{4}\mathrm{Ln}(x+3) - \frac{5}{8}\mathrm{Ln}(x+5) + k =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{8}\left(\mathrm{Ln}\,(x+1) + 6\,\mathrm{Ln}\,(x+3) - 5\,\mathrm{Ln}\,(x+5)\right) + k = \frac{1}{8}\mathrm{Ln}\left| \frac{(x+3)^6}{(x+1)(x+5)^5} \right| + k}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx}$$

Sol: $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \mathrm{Ln}\left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| +$

Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, antes de aplicar el método de descomposición en fracciones simples tendremos que dividir. De esta forma obtenemos:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x \quad\; x}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \cdot dx = \int (x^2 + x + 4)dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x \quad\; x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x \quad 8}{x^3 - 4} \cdot dx$$

A la integral que nos queda le aplicamos el método de descomposición en fracciones simples. Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-4x=0 \quad \rightarrow \quad x\cdot(x \quad -4)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también lo serán; por tanto:

$$4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

Calculamos los coeficientes indeterminados: le vamos asignando los valores de las raíces

$$\begin{array}{lllll} x=0 & \rightarrow & -8=-4A & \rightarrow & A=2 \\ x=2 & \rightarrow & 40= \quad 8B & \rightarrow & B=5 \\ x=-2 & \rightarrow & -24=8C & \rightarrow & C=-3 \end{array}$$

Por tanto, la fracción descompuesta en fracciones simples nos queda:

$$\frac{4x^2+16 \quad 8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$$

La integral de la función pedida será:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\cdot dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+ \quad \frac{4x^2+16x-8}{x \quad 4x}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{}{2}+4x+\int \quad \frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x \quad 2}\Big)\cdot dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{}{2}+4x+\int \frac{2}{x}\cdot dx+\int \frac{5}{x-2}\cdot dx-\int \frac{3}{x+2}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{}{2}+4x+2\int \frac{1}{x}\cdot dx+5\int \frac{1}{x-2}\cdot dx-3\int \frac{1}{x \quad 2}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{}{}+4x+2\cdot \text{Ln}\,|\,x\,|+5\cdot \text{Ln}\,|\,x-2\,|-3\cdot \text{Ln}\,|\,x+2\,|+k=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\text{Ln}\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)} \qquad \text{Sol: } \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6}\ \text{Ln}\left|\frac{(\ \ -1)}{(x+1)^3}\right| + \frac{16}{3}\cdot \text{Ln}\,|\,x+2\,| + k$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, tenemos que dividir, obteniendo:

$$\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} = x - 2 + \frac{5\ \ \ -}{(x\ \ -1)(x+2)}$$

Con lo que

$$\int \frac{x^4 \cdot dx}{(x^2-1)(x+2)} = \int (x-2)\ dx + \int \frac{5x^2-4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2-4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$$

y tendremos que integrar la función racional que nos queda, donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2-4}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x\ \ -1)(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, también lo serán los numeradores. Entonces:

$$5x^2 - 4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

Calculamos los coeficientes indeterminados:

$$x = 1 \quad \to \quad 1 = 6A \quad \to \quad A = \frac{1}{6}$$

$$x = -1 \quad \to \quad 1 = -2B \quad \to \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$x = -2 \quad \to \quad 16 = 3C \quad \to \quad C = \frac{16}{3}$$

Entonces: $$\frac{5x^2 -}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{16}{}}{x+2}$$

Y, por tanto:

$$\int \frac{x^4 \ \ dx}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2 -}{(x \ \ -1)(x+2)} dx = \frac{x^2}{2} - \ \ x + \int \left(\frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{16}{\ }}{x+2} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{\frac{1}{6}}{x-1} \cdot dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \cdot dx + \int \frac{\frac{16}{\ }}{x+2} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \cdot dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{x+2} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \mathrm{Ln}\,|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ln}\,|x+1| + \frac{16}{3} \cdot \mathrm{Ln}\,|x+2| + k =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \left(\mathrm{Ln}\,|x-1| - 3 \cdot \mathrm{Ln}\,|x+1| \right) + \frac{16}{3} \cdot \mathrm{Ln}\,|x+2| + k =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \mathrm{Ln} \left| \frac{-1}{(x+1)^3} \right| + \frac{16}{3} \cdot \mathrm{Ln}\,|x+2| + k$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x-2)} \qquad \text{Sol: } \frac{1}{x-1} + \mathrm{Ln} \left| \frac{x-}{\ } \right| \quad k$$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador aplicamos la descomposición en fracciones simples directamente:

$$\frac{1}{(x-1)^2 (x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2 (x-2)} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2$$

Calculamos los coeficientes:

$x = 1: \quad 1 = -B \quad \rightarrow \quad B = -1$

$x = 2: \quad 1$

$x = 0: \quad 1 = 2A - 2B + C \quad \rightarrow \quad 1 = 2A + 2 + 1 \quad \rightarrow \quad A = -1$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x-1) \ \ (x-2)} \cdot dx = \int \frac{-1}{x-1} \cdot dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} \cdot dx + \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x-1}\cdot dx - \int (x-1)^{-2}\cdot dx + \int \frac{\quad}{\quad}\cdot dx =$$

$$= -\text{Ln}\,|\,x-1\,| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \text{Ln}\,|\,x-2\,| + k = \frac{1}{x-1} + \text{Ln}\left|\,\frac{\quad 2}{-1}\,\right| + k$$

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx \qquad\qquad \text{Sol:}\ \frac{3}{x-2} + \text{Ln}\,\frac{(x-2)^2}{x^2} + k$$

Igual que en el anterior, aplicamos la descomposición en fracciones simples:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-4x^2+4x=0 \;\rightarrow\; x\cdot(x^2-4x+4)=0 \;\rightarrow\; x\cdot(x-2)^2=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=2 \quad \text{(doble)} \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x-8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \;\Rightarrow$$

Calculamos los coeficientes:

$$x=0 \;\rightarrow\; -8=4A \;\rightarrow\; A=-2$$
$$x=2 \;\rightarrow\; -6=2C \;\rightarrow\; C=-3$$
$$x=1 \;\rightarrow\; -7=A-B+C \;\rightarrow\; B=7+A+C=7-2-3=2 \;\rightarrow\; B=2$$

Entonces:

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \left(\frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}\right.\cdot dx =$$

$$= -2\int \frac{1}{x}\cdot dx + 2\int \frac{1}{x-2}\cdot dx - 3\int \frac{1}{(x\quad 2)^2}\cdot dx = -2\,\text{Ln}\,|\,x\,| + 2\,\text{Ln}\,|\,x-2\,| - 3\int (x-2)^{-2}dx =$$

$$= -2\,\text{Ln}\,|\,x\,| + 2\,\text{Ln}\,|\,x-2\,| - 3\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + k = \frac{3}{x} + \text{Ln}\,\frac{(\quad 2)}{\quad_2} + k$$