

ECUACIONES IRRACIONALES.

Ecuaciones irracionales

Son aquellas en las que aparecen raíces (nosotros las resolveremos con raíces cuadradas). Para resolverlas haremos lo siguiente:

1. Se aísla una raíz en un miembro y se pasa lo restante al segundo miembro
2. Se elevan al cuadrado los dos miembros y se hacen las operaciones oportunas.
3. Se comprueba si realmente las candidatas a soluciones obtenidas son soluciones de la ecuación de partida, para ello se sustituye el valor o valores de "x" obtenidos en la ecuación de partida.

Consideraremos la raíz cuadrada positiva.

42º Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

$$2) x - 1 + \sqrt{x - 2} = 13$$

$$\sqrt{x - 2} = 13 - x + 1$$

$$\sqrt{x - 2} = 14 - x$$

$$(\sqrt{x - 2})^2 = (14 - x)^2$$

$$x - 2 = 196 + x^2 - 28x$$

$$x^2 - 29x + 198 = 0$$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 198}}{2} = \begin{cases} x = 18 \\ x = 11 \end{cases}$$

CANDIDATAS $x = 18$, $x = 11$

$$x = 11 \quad 11 - 1 + \sqrt{11 - 2} \stackrel{?}{=} 13$$

$$11 - 1 + 3 = 13$$

$x = 11$ Si es solución.

$$x = 18 \quad 18 - 1 + \sqrt{18 - 2} \stackrel{?}{=} 13$$

$$18 - 1 + 4 \neq 13 \quad \text{No}$$

$x = 18$ No es solución.

$$6) \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-6} - 2$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{2x-6} - 2)^2$$

$$x-5 = (\sqrt{2x-6})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2x-6}$$

$$x-5 = 2x-6 + 4 - 4\sqrt{2x-6} \quad (\text{Se aísla la raíz})$$

$$-x - 3 = -4\sqrt{2x-6}$$

$$(-x-3)^2 = (-4\sqrt{2x-6})^2$$

$$\text{Nota: } (-a, -b)^2 = (-(a+b))^2 = (a+b)^2$$

$$(x+3)^2 = (-4\sqrt{2x-6})^2$$

$$x^2 + 9 + 6x = 16(2x-6)$$

$$x^2 + 9 + 6x = 32x - 96$$

$$x^2 + 9 + 6x - 32x + 96 = 0$$

$$x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$x = \frac{-26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 105}}{2} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 420}}{2} =$$

$$= \frac{26 \pm \sqrt{366}}{2} = \frac{26 \pm 16}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 21 \\ x_2 = 5 \end{array} \right\} \text{CANDIDATAS.}$$

Verificar las soluciones:

$$x_1 = 21 \quad \sqrt{21-5} \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \cdot 21 - 6} - 2$$

$$4 = 4 \quad \underline{\underline{\text{Si}}}$$

$x_1 = 21$ Si ES SOLUCIÓN.

$$x_2 = 5 \quad \sqrt{5-5} \stackrel{?}{=} \sqrt{2 \cdot 5 - 6} - 2$$

$$0 = 0 \quad \underline{\underline{\text{Si}}}$$

$x_2 = 5$ TAMBIÉN ES SOLUCIÓN.

$$7) \sqrt{3x+1} + \sqrt{10-x} = 5$$

$$\sqrt{3x+1} = 5 - \sqrt{10-x} \quad (\text{Se aísla } \sqrt{})$$

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (5 - \sqrt{10-x})^2$$

$$3x+1 = 25 + 10-x - 10\sqrt{10-x} \quad (\text{Se aísla } \sqrt{})$$

$$4x - 34 = -10\sqrt{10-x}$$

$$2(2x - 17) = -2 \cdot 5 \sqrt{10-x}$$

$$2x - 17 = -5\sqrt{10-x}$$

$$(2x - 17)^2 = (-5\sqrt{10-x})^2$$

$$4x^2 + 289 - 68x = 25(10-x)$$

$$4x^2 + 289 - 68x = 250 - 25x$$

$$4x^2 - 43x + 39 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{43 \pm \sqrt{(-43)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 39}}{8} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 624}}{8} = \\
 &= \frac{43 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{43 \pm 35}{8} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{78}{8} = \frac{39}{4} \\ x_2 = 1 \end{array} \right\} \text{CANDIDATOS}
 \end{aligned}$$

Verificamos:

$$x_1 = \frac{39}{4} \quad \sqrt{3 \cdot \frac{39}{4} + 1} + \sqrt{10 - \frac{39}{4}} \stackrel{?}{=} 5$$

$$\sqrt{\frac{121}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 5$$

$$\frac{11}{2} + \frac{1}{2} = 5$$

$$6 \neq 5 \quad \underline{\underline{\text{No.}}}$$

$$x_1 = \frac{39}{4} \text{ NO ES SOLUCIÓN}$$

$$x_2 = 1 \quad \sqrt{3 \cdot 1 + 1} + \sqrt{10 - 1} \stackrel{?}{=} 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5 \quad \underline{\underline{\text{Si}}}$$

$$x_2 = 1 \text{ SI ES SOLUCIÓN}$$

$$1) \quad 2\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \quad (\text{Se aísla la raíz})$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{2}$$

$$(\sqrt{x^2 - 1})^2 = \left(\frac{x - 1}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 1 = \frac{(x-1)^2}{4}$$

$$4(x^2 - 1) = x^2 + 1 - 2x$$

$$4x^2 - 4 = x^2 + 1 - 2x$$

$$4x^2 - x^2 - 4 + 2x - 1 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Verificamos:

$$x = 1 \quad 2\sqrt{1^2 - 1} \stackrel{?}{=} 1 - 1$$

$$2\sqrt{0} = 0$$

$$0 = 0 \text{ Sí.}$$

$x = 1$ SI ES SOLUCIÓN.

$$x = -\frac{5}{3} \quad 2\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 1} \stackrel{?}{=} -\frac{5}{3} - 1$$

$$2\sqrt{\frac{25 - 9}{9}} = \frac{-5 - 3}{3}$$

$$2\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{8}{3}$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} \neq -\frac{8}{3} \text{ No.}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$



NO ES SOLUCIÓN

$$3) \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{x+2}$$

$$(\sqrt{x^2 - 2x + 2})^2 = (\sqrt{x+2})^2$$

$$x^2 - 2x + 2 = x + 2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Verificamos:

$$\sqrt{0^2 - 2 \cdot 0 + 2} \stackrel{?}{=} \sqrt{0+2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{Sí.} \quad \hookleftarrow x=0$$

$x=0$ Sí ES SOLUCIÓN.

$$x=3 \quad \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 + 2} \stackrel{?}{=} \sqrt{3+2}$$

$$\sqrt{9 - 6 + 2} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{5} \quad \text{Sí}$$

$x=3$ Sí ES SOLUCIÓN.

$$4) \sqrt{x^4 + 1} = x^2 + x + 1$$

$$(\sqrt{x^4 + 1})^2 = (x^2 + x + 1)^2$$

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$2x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(2x^2 + 3x + 2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4} \quad x \notin \mathbb{R}$$

Candidata : $x=0$

Verificamos.

$$\sqrt{0^4 + 1} \stackrel{?}{=} 0^2 + 0 + 1$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$1 = 1 \quad \text{Sí}$$

$x=0$ SÍ ES SOLUCIÓN

$$8) \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$$

$$\sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4}$$

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (6 - \sqrt{x+4})^2$$

$$2x-1 = 36 + x+4 - 12\sqrt{x+4}$$

$$2x-1-40-x = -12\sqrt{x+4}$$

$$\frac{x-41}{-12} = \sqrt{x+4}$$

$$\frac{(x-41)^2}{144} = x+4$$

$$x^2 + 1681 = 144(x+4)$$

-82x

$$x^2 + 1681 - 82x = 144x + 576$$

$$x^2 + 1681 - 82x - 144x - 576 = 0$$

$$x^2 - 226x + 1105 = 0$$

$$x = \frac{226 \pm \sqrt{(226)^2 - 4 \cdot 1105}}{2} = \frac{226 \pm \sqrt{51076 - 4420}}{2} =$$

$$= \frac{226 \pm 216}{2} \begin{cases} x_1 = 221 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Verificamos:

$$x_1 = 221 \quad \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} \stackrel{?}{=} 6$$

$$\sqrt{442 - 1} + \sqrt{225} = 6$$

$$21 + 15 = 6$$

$$36 \neq 6 \quad \text{No.}$$

$x = 221$ NO ES SOLUCIÓN.

$$x_2 = 5 \quad \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} \stackrel{?}{=} 6$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{9} = 6$$

$$3 + 3 = 6$$

$$6 = 6 \quad \text{Sí}$$

$x = 5$ SI ES SOLUCIÓN