Opción A

Ejercicio 1 opción A, Reserva A 2019 (modelo 3)

Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = te^{-t/2}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.
(a) [2 puntos] Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.
(b) [0'5 puntos] Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

Solución

Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = te^{-t/2}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.
(a)
Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.

Calculamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, que es el estudio de su 1ª derivada

La función $C(t) = te^{-t/2}$ es continua y derivable en $(-\infty,\infty)$. Como la variable "t" es tiempo consideraremos hipotéticamente su dominio como el intervalo $[0,\infty)$.

$C'(t) = 1\cdot e^{-t/2} + t\cdot e^{-t/2}\cdot(-1/2) = e^{-t/2}\cdot(1 - t/2)$.

De $C'(t) = 0$ (las exponenciales no se anulan nunca) $\rightarrow$ $1 - t/2 = 0$ $\rightarrow$ $t = 2$, que será el posible extremo.

Como $C'(1) = e^{-1/2}\cdot(1 - 1/2) = (+)\cdot(1/2) > 0$, la función C es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,2).
Como $C'(3) = e^{-3/2}\cdot(1 - 3/2) = (+)\cdot(-1/2) < 0$, la función C es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(2,+\infty)$.

Por definición x = 2 es un máximo relativo de C que vale $C(2) = 2\cdot e^{-1} = 2/e \cong -1'54$

Sabemos que los extremos absolutos se suelen encontrar en las soluciones de C '(t) = 0, t = 2, los puntos donde C no es continua ni derivable (no hay ninguno) y los extremos del intervalo, t = 0 y calcularemos el límite en $+\infty$.

C(0) = 0
C(2) = 2/e $\cong$ 0'7357

$\lim_{x\to+\infty} t\cdot e^{-t/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t}{e^{t/2}} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}, \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{t/2}\cdot(1/2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{t/2}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$, por tanto y = 0 es una asíntota horizontal de la función C en $+\infty$. Según lo anterior **el máximo absoluto está en t = 2 mg/ml y vale C(2) = = 2/e**.
(b)
Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

Creo que el paciente nunca está en peligro pues el máximo absoluto está en t = 2 mg/ml y vale C(2) = = 2/e ≅ 0'7357, que no alcanza la concentración de riesgo de 1mg/ml.

Ejercicio 2 opción A, Reserva A 2019 (modelo 3)

[2'5 puntos] Dado un número real a > 0, considera la función $f : R \rightarrow R$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta y = 2ax. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

Solución

Dado un número real a > 0, considera la función $f : R \rightarrow R$, dada por $f(x) = x^2 - ax$, y la recta y = 2ax. Determina a sabiendo que el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta anterior es 36.

La gráfica de f es una parábola así ($\cup$) porque el número que multiplica a x^2 es positivo.
Cortes con los ejes:

Si x = 0, punto (0,0)
Si $f(x) = 0 = x^2 - ax = x\cdot(x - a)$, de donde x = 0 y x = a. Puntos (0,0) y (a,0).

Veamos los cortes de la gráfica de f y la recta y = 2ax. Igualamos f(x) = y $\rightarrow$ $x^2- ax = 2ax$ $\rightarrow$ $x^2- 3ax=0= = x\cdot(x - 3a)$, por tanto las funciones se cortan en las abscisas x = 0 y x = 3a, que serán los límites de integración para calcular el área limitada por la recta y la parábola. (la recta está por encima)

$$\text{Área} = 36 = \int_0^{3a}(\text{recta - parabola})dx = \int_0^{3a}(2ax - (x^2 - ax))dx = \int_0^{3a}(3ax - x^2)dx = \left[3a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{3a} =$$

$$= \left(3a\frac{(3a)^2}{2} - \frac{(3a)^3}{3}\right) - (0) = \frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{3} = \frac{27a^3}{6} = \frac{9a^3}{2}$$. Igualando $(9a^3)/2 = 36 \rightarrow$ **$a^3 = 8$, de donde tenemos a = 2.**

Ejercicio 3 opción A, Reserva A 2019 (modelo 3)

[2'5 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AX = (A^{-1}A^t + I)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

Solución

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2-2F_3 \\ F_2-F_3 \\ \, \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -2(-1-1) = 4 \neq 0$, existe la matriz inversa

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. $|A| = 4$; $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa

es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \frac{2}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Llamamos $B = A^{-1}\cdot A^t + I_3 =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llamamos $C = B\cdot B = B^2$, $= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\cdot I_3$, por tanto la ecuación $AX = (A^{-1}A^t + I)^2$, se reduce a la ecuación $AX = C$.

Como existe la matriz inversa A^{-1}, multiplicando por la izquierda la expresión $A\cdot X = C$, tenemos
$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X = A^{-1}C \rightarrow X = A^{-1}C$

La matriz pedida es **$X = A^{-1}\cdot C = A^{-1}\cdot 4\cdot I_3 = 4\cdot A^{-1} =$** $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción A, Reserva A 2019 (modelo 3)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - mz = 1$.

(a) [1'25 puntos] Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.
(b) [1'25 puntos] Para m = -1, calcula la distancia entre r y π.

Solución

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - mz = 1$.

(a)

Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.

Sabemos que "r" y "π" son paralelos si los vectores directores de la recta son perpendiculares a los vectores normales del plano, es decir su producto escalar (•) es cero.

Un vector director de "r" es $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ **i**(1) - **j**(1) + **k**(-1) = (1, -1, -1).

Un vector normal del plano "π" es **n** = (2,1-m).

Tenemos **u•n** = 0 = (1, -1, -1)•(2,1-m) = 2 - 1 + m = 0, **de donde m = -1**.

(b)

Para m = -1, calcula la distancia entre r y π.

Para m = -1 hemos visto en el apartado anterior que r y π son paralelos, por tanto la distancia de r a π coincide con la distancia de un punto de r a π, es decir:

d(r, π) = d(A, π). En $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases}$, tomando y = 0 un punto de r seria A(-2,0,-5) por tanto la distancia pedida es d(r, π) es: d(r, π) = = d(A, π) = $\dfrac{|2(-2)+(0)+(-5)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{6}} = \dfrac{9\cdot\sqrt{6}}{6} u^1$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Reserva A 2019 (modelo 3)

[2'5 puntos] Sea f : (1, e) → R la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$ para x > 0 (ln denota el logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima.

Solución

Sea f : (1, e) → R la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$ para x > 0 (ln denota el logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente de es máxima.

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente de la función f es f '(x).

Como me dicen que dicha pendiente (f '(x)) tiene que ser máxima, la derivada de la función f '(x) tiene que ser cero, es decir f ''(x) = 0, y me dicen que x > 0, por tanto tomaremos sólo las soluciones positivas.

$f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$; $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = -1x^{-2} + \dfrac{1}{x}$; $f''(x) = 2x^{-2-1} + \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{-1}{x^2}$.

De f ''(x) = 0, tenemos $\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{-1}{x^2} = 0$, es decir $\dfrac{2}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$, luego $2x^2 = x^3$, con lo cual:

$2x^2 - x^3 = 0 = x^2\cdot(2 - x)$. Soluciones x = 0 (doble), que no está en el dominio y x = 2.

Veamos que efectivamente x = 2 es un máximo de f ''(x), es decir f '''(2) < 0.

$f''(x) = 2x^{-3} - 1\cdot x^{-2}$, de donde $f'''(x) = -6x^{-4} + 2\cdot x^{-3} = \dfrac{-6}{x^4} + \dfrac{2}{x^3}$, luego $f'''(2) = \dfrac{-6}{2^4} + \dfrac{2}{2^3} < -1/8 < 0$.

Nos están pidiendo la recta tangente a la gráfica de f en x = 2

Recta tangente en x = 2 es: y - f(2) = f '(2)·(x - 2)

$f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(x)$; luego f(2) = 1/2 + ln(2). $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$, luego f '(4) = -1/4 + 1/2 = 1/4.

La recta tangente pedida es: **y - (1/2 + ln(2)) = (1/4)·(x - 2)**, o bien **y = x/4 + ln(2)**.

Ejercicio 2 opción B, Reserva A 2019 (modelo 3)

Sea f : [0, π/6] → R una función continua y sea F una primitiva de f que cumple F(0) = π/3 y F(π/6) = π.
Calcula:

(a) [1 punto] $\int_0^{\pi/6} (3f(x) - \cos(x))dx$

(b) [1'5 puntos] $\int_0^{\pi/6}(\text{sen}(F(x))f(x)dx$.

Solución

Sea f : [0, π/6] → R una función continua y sea F una primitiva de f que cumple F(0) = π/3 y F(π/6) = π.

Sabemos que si una función F(x) es una primitiva de la función f(x) entonces F '(x) = f(x), además también se verifica que ∫ f(x)dx = F(x) + K, con F '(x) = f(x), y que [h(F(x))] ' = h '(F(x))·F '(x) = h '(F(x))·f(x).

(a)

$$\int_0^{\pi/6}(3f(x) - \cos(x))dx = 3\int_0^{\pi/6}f(x)dx - \int_0^{\pi/6}\cos(x)dx = 3\cdot\left[F(x)\right]_0^{\pi/6} - \left[\text{sen}(x)\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 3\cdot\left[F(\pi/6) - F(0)\right] - \left[\text{sen}(\pi/6) - \text{sen}(0)\right] = 3\cdot\left[\pi - \pi/3\right] - \left[1/2 - 0\right] = 2\pi - 1/2.$$

(b)

$$\int_0^{\pi/6}(\text{sen}(F(x))f(x)dx = \left[-\cos(F(x))\right]_0^{\pi/6} = (-\cos(F(\pi/6))) - (-\cos(F(0))) = (-\cos(\pi)) + \cos(\pi/3)) = -(-1) + 1/2 = 3/2.$$

Ejercicio 3 opción B, Reserva A 2019 (modelo 3)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \lambda y + z = 4 \\ -\lambda x + y + z = 1 \\ x + y + z = \lambda+3 \end{cases}$,

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para λ = 1.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + \lambda y + z = 4 \\ -\lambda x + y + z = 1 \\ x + y + z = \lambda+3 \end{cases}$,

a)

Discute el sistema según los valores de λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 4 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda+3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1-F_3 \\ F_2-F_3 \\ \text{fila} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & 0 \\ -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (-1)\cdot(\lambda - 1)\cdot(-\lambda - 1 - 0) =$

= (λ - 1)·(λ + 1)

De |A| = 0, tenemos λ - 1 = 0 y λ + 1 = 0, de donde λ = ±1.

Si **λ ≠ ± 1**, |A| ≠ 0, *rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas*. **Sistema compatible y determinado y tiene una única solución, por el Teorema de Rouché**

Si **λ = 1** tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 + 1 = 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como la fila 1ª y la 4ª son iguales el rango de A* coincide con el de la matriz A.

Como rango(A) = rango(A) = 2 < 3 (número de incógnitas),* **el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una única solución (infinitas e nuestro caso), por el Teorema de Rouché**.

Si **λ = -1** tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 + 1 = 2 ≠ 0, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1\cdot(-4+6) = 2 \neq 0$, tenemos rango(A*) = 3.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, **el sistema es incompatible y no tiene solución, por el Teorema de Rouchè.**

b)

Resuelve el sistema, si es posible, para $\lambda = 1$.

Hemos visto, en el apartado (a) que **λ = 1, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.** Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos, las dos primeras que son con los que he formado el menor de orden 2 distinto de 0 de la matriz A.

$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -x+y+z=1 \;(F_2-F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x+y+z=4 \\ \quad -2x=-3 \end{cases}$, de donde x = 3/2. Tomando z = b $\in$ R, resulta y = 4 - 3/2 - b.

Las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (3/2, 5/2 - b, b)** con b $\in$ R.

Ejercicio 4 opción B, Reserva A 2019 (modelo 3)

[2'5 puntos] Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ de manera que junto con los puntos A(1,1,0) , B(1,0,1) y C(0,1,1) formen un tetraedro de volumen 5/6.

Solución

Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ de manera que junto con los puntos A(1,1,0) , B(1,0,1) y C(0,1,1) formen un tetraedro de volumen 5/6.

La recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ se puede poner en la forma $r \equiv \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases}$, por tanto un punto genérico de la recta "r" es X(x,x,x,)

Sabemos que el volumen del tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AB**, **AC** y **AX**, que es el valor absoluto (lo notaremos **| |**) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **AB**, **AC** y **AX**. El producto mixto de tres vectores era su determinante.

AB = **b – a** = (0,-1,1); **AC** = **c – a** (-1,0,1) y **AX** = **x – a** = (x-1,x-1,x-0)

Me dice que el volumen es 5/6, luego tenemos, 5/6 = (1/6)·**|** [**AB**, **AC** y **AX**] |, donde 5 = |det(**AB**, **AC, AX**)|

Tenemos det **(AB**, **AC, AX) =** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x-1 & x-1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2+C_3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ x-1 & x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} = -1\cdot(-1)\cdot(-2x+1-x+1) =$

= (-3x + 2)

Igualando tenemos 5 = |-3x + 2|, que nos proporciona dos ecuaciones:

+(-3x + 2) = 5 $\rightarrow$ -3x = 3 $\rightarrow$ x = -1. **Un punto de "r" es X_1(x,y,z) = X_1(-1,-1,-1)**.
-(-3x + 2) = 5 $\rightarrow$ 3x = 7 $\rightarrow$ x = 7/3. **Otro punto de "r" es X_2(x,y,z) = X_1(7/3,7/3,7/3)**.