Opción A

Ejercicio 1 opción A, Junio 2019 (modelo 1)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$ para $x \neq -1$.

a) [1'5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$ para $x \neq 1$.

a)
Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [(f(x)] = \infty$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}\right) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$; la recta **x = -1** es una A.V. de la gráfica de f(x).

Posición relativa $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}\right) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma y = mx + n con $m = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, y es la misma en +∞ y en -∞. Como hay A.O en ±∞, f no tiene asíntotas horizontales (A.H.) en ±∞.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

x^2+3x+4	$2x+2$
$-x^2-x$	$x/2 + 1$
0 $2x+4$	
$-2x-2$	
2	

La A.O. de f(x) es **y = x/2 + 1** en ± ∞.
Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x\cdot(2x+2)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}(1/2) = 1/2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2(x+1)} - (\frac{x}{2})\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4-x^2-x}{2(x+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty}(1) = 1$$

Efectivamente la A.O. de f(x) era **y = x/2 + 1** en ± ∞.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2} - (x/2+1)\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2} - (x/2+1)\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en - ∞ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2};\ f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(2x+2) - (x^2+3x+4)\cdot 2}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2+10x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}.$$

Si f '(x) = 0 → $2x^2 + 4x – 2 = 0 \to x^2 + 2x - 1 = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Las soluciones son $x = -1 - \sqrt{2} \cong -2'41$ y $x = -1 + \sqrt{2} \cong 0'41$, que serán los posibles extremos relativos.
Como f '(-3) = 4/(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$
Como f '(0) = -2/(+) < 0, luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}) - \{-1\}$
Como f '(1) = 4/(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$
Por definición en $x = -1 - \sqrt{2}$ hay un máximo relativo que vale $f(-1 - \sqrt{2})$.
Por definición en $x = -1 + \sqrt{2}$ hay un mínimo relativo que vale $f(-1 + \sqrt{2})$.

Ejercicio 2 opción A, Junio 2019 (modelo 1)

[2'5 puntos] Sea la función f: $(0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 1). (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$.)

Solución

Sea la función f: $(0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 1). (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$.)

Las primitivas de f son $F(x) = \int \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \to x = \ln(t) \\ dx = dt/t \end{array} \right\} = \int \dfrac{1 + t}{(1 - t)\cdot t}dt = \int \left(\dfrac{A}{(1 - t)} + \dfrac{B}{t} \right) dt =$
$= -A\cdot\ln|1 - t| + B\cdot\ln|t| + K = \{\text{Quito cambio}\} = -A\cdot\ln|1 - e^x| + B\cdot\ln|e^x| + K = -A\cdot\ln|1 - e^x| + B\cdot x + K.$

Calculamos las constantes A y B
De $\dfrac{1 + t}{(1 - t)\cdot t} = \dfrac{A}{(1 - t)} + \dfrac{B}{t}$ tenemos $\dfrac{1 + t}{(1 - t)\cdot t} = \dfrac{A\cdot t + B\cdot(1 - t)}{(1 - t)\cdot t}$
Igualando numeradores tenemos $1 + t = A\cdot t + B(1 - t)$

Para t = 1, tenemos 2 = A, de donde A = 2
Para t = 0, tenemos 1 = B(1), de donde B = 1.

Las primitiva son F(x) = $-A\cdot\ln|1 - e^x| + B\cdot x + K$ **= $-2\cdot\ln|1 - e^x| + 1\cdot x + K$.**

Como piden la que pasa por (1, 1) tenemos f(1) = 1, es decir $F(1) = 1 = -2\cdot\ln|1 - e^1| + 1 + K$, de donde tenemos que $K = 2\cdot\ln|1 - e) = 2\cdot\ln(e - 1)$ y la primitiva pedida es: **$F(x) = -2\cdot\ln|1 - e^x| + x + 2\cdot\ln(e - 1)$.**

Ejercicio 3 opción A, Junio 2019 (modelo 1)

[2'5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que a + d = 1, tienen determinante 1 y cumplen AX = XA, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que a + d = 1, tienen determinante 1 y cumplen AX = XA, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$A\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - c & 0 - d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$; $X\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + b & -a + 0 \\ 0 + d & -c + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$
De $A\cdot X = X\cdot A$ tenemos:
-c = b
-d = -a
a = d
b = -c. En realidad sólo hay dos **a = d** y **b = -c.**
Nos dan a + d = 1, luego entrando en **a = d** tenemos $a + a = 1 \to 2a = 1 \to$ **a = 1/2 = d**

Nos dan $|X| = 1 = ad – bc = (1/2)\cdot(1/2) – (-c)\cdot c = 1/4 + c^2$, luego $c^2 = 1 – 1/4 = 3/4 \rightarrow c = \pm\sqrt{(3/4)}$.
Si $c = +\sqrt{(3/4)}$, de **b = -c** tenemos $b = -\sqrt{(3/4)}$
Si $c = -\sqrt{(3/4)}$, de **b = -c** tenemos $b = +\sqrt{(3/4)}$
Sólo hay dos matrices:

Una tiene **a = 1/2 = d, c = +√(3/4) y b = -√(3/4)**, es decir $X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$

La otra tiene **a = 1/2 = d, c = -√(3/4) y b = +√(3/4)**, es decir $X_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción A, Junio 2019 (modelo 1)

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.
a) [1'25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
b) [1'25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.
a)
Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

De r tomamos un punto, el A(2, 2, 1) y un vector director **u** = (-1, 3, 1). Un punto genérico de r es X(x,y,z) = (2 - b, 2 + 3b, 1 + b) con $b \in R$.
Tenemos: $d(X;\pi_1) = \frac{|2-b|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{|2-b|}{1} = |2-b|$; $d(X;\pi_2) = \frac{|2-b|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{|2+3b|}{1} = |2+3b|$.
Igualando $d(X;\pi_1) = d(X;\pi_2)$ tenemos: $|2 - b| = |2 + 3b|$, que nos da lugar a dos ecuaciones:

$2 - b = +(2 + 3b) \rightarrow 0 = 4b \rightarrow b = 0$, y un punto X_1 es $X_1(2 - (0), 2 + 3(0), 1 + (0)) = X_1(2, 2, 1)$.
$2 - b = -(2 + 3b) \rightarrow 2b = -4 \rightarrow b = -2$, y otro punto X_2 es $X_2(2 - (-2), 2 + 3(-2), 1 + (-2)) = X_2(4, -4, -1)$.

Los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2, son $X_1(2, 2, 1)$ y $X_2(4, -4, -1)$.
b)
Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

La recta s intersección de los planos π_1 y π_2 tiene por vector director **v** el producto vectorial (x) de los vectores normales de cada plano, es decir **v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(0 – 0) – **j**(0 – 0) + **k**(1 – 0) = (0, 0, 1), por tanto la recta s en forma vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (0, 0, m)$ con $m \in R$. Un punto de s es O(0, 0, 0)

Como los vectores **u** = (-1, 3, 1) y **v** = (0, 0, 1) no son proporcionales, las rectas r y s no son paralelas.
Si det(**OA**, **u**, **v**) = 0 las rectas se cortan en caso contrario se cruzan.

Como det(**OA**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 1\cdot(6 + 2) = 8 \neq 0$, **las rectas r y s se cruzan.**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Junio 2019 (modelo 1)

Considera la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = (x – a)\cdot e^x$.
a) [1'25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x = 0.
b) [1'25 puntos] Para a = 1, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución

Considera la función f: R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = (x – a)\cdot e^x$.

a)

Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en x = 0.

Si x = 0 es un punto crítico sabemos que f '(0) = 0.

$f(x) = (x – a)\cdot e^x$; $f'(x) = (1)\cdot e^x + (x – a)\cdot e^x = e^x \cdot(1 + x – a)$.

De f '(0) = 0 tenemos 1 + (0) – a = 0, de donde **a = 1**. (la exponencial no se anula nunca)

b)

Para a = 1, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada, y en ellos cambia la curvatura.

Para a = 1, $f(x) = (x – 1)\cdot e^x$; $f'(x) = (1)\cdot e^x + (x – 1)\cdot e^x = e^x \cdot(1 + x – 1) = x\cdot e^x$.

La 2ª derivada es $f''(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x\cdot(x + 1)$

De f ''(x) = 0, tenemos x + 1 = 0, de donde x = -1 que es el posible punto de inflexión.

Como $f''(-2) = e^{-2}\cdot(-2 + 1) = -1/(e^2) < 0$, f es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, -1)$.

Como $f''(0) = e^0\cdot(0 + 1) = 1 > 0$, f es convexa ($\cup$) en $(-1, +\infty)$.

Por definición **x = -1 es punto de inflexión y vale $f(-1) = (-1 - 1)\cdot e^{-1} = -2/e$.**

Ejercicio 2 opción B, Junio 2019 (modelo 1)

Considera las funciones f : $(- 2, +\infty) \rightarrow$ R definidas por f(x) = ln(x + 2) (ln denota la función logaritmo neperiano) y g : R $\rightarrow$ R, definida por $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(x - 3)$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto de la gráfica de f, la gráfica de g, la recta x = 1 y la recta x = 3. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)

(b) [1'5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

Solución

Considera las funciones f : $(- 2, +\infty) \rightarrow$ R definidas por f(x) = ln(x + 2) (ln denota la función logaritmo neperiano) y g : R $\rightarrow$ R, derinida por $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(x - 3)$.

(a)

Esboza el recinto de la gráfica de f, la gráfica de g, la recta x = 1 y la recta x = 3.

Sabemos que la gráfica de ln(x + 2) es exactamente igual que la de ln(x) (que sabemos, siempre es creciente, y corta al eje OX en el punto de abscisa x = 1, y tiene una asíntota vertical en x = 0), pero desplazada 2 unidades a la izquierda en abscisas (OX). Por tanto la asíntota vertical es x = -2 y corta al eje OX en x = -1.

De x = 0 tenemos f(0) = ln(0 + 2) = ln(2), es decir pasa por el punto (0,ln(2)).

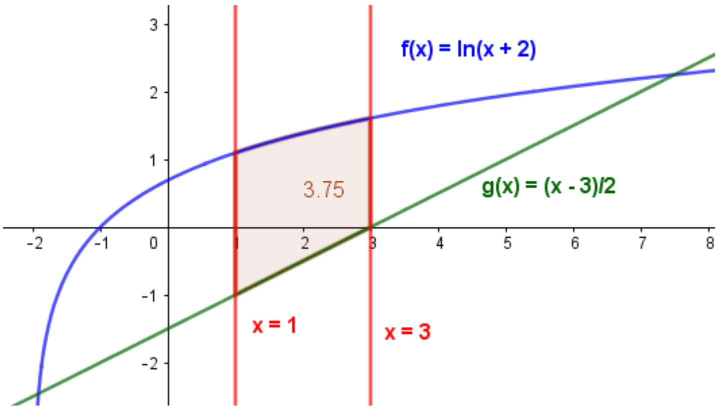
De f(x) = 0 tenemos 0 = ln(x + 2) = ln(1), de donde x+2=1, por tanto x = -1, es decir pasa por el punto (-1,0).

Sabemos que $\ln(0^+) = -\infty$ (es un límite). Como $\lim_{x\to -2+} f(x) = \ln(-2 + 2) = \ln(0^+) = -\infty$, la recta x = -2 es una asíntota vertical de la gráfica de la función f(x) = ln(x + 2).

Sabemos que la gráfica de $g(x) = \frac{1}{2}\cdot(x - 3)$ es la de una recta, y con dos puntos es suficiente. El punto (0, -3/2) y el punto (3, 0).

También sabemos que las rectas x = 1 y la recta x = 3 son rectas verticales.

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de las gráficas es:



(b)
Determina el área del recinto anterior.

Viendo la gráfica el área que me piden es la sombreada en marrón, y los límites de integración son 1 y 3:

Área pedida = $\int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right)dx = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)dx = {**}$

$= [\, x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| - x^2/4 + 3x/2 \,]_1^3 =$

$= (3\cdot\ln(5) - 3 + 2\ln(5) - 9/4 + 9/2) - (1\cdot\ln(3) - 1 + 2\ln(2) - 1/4 + 3/2)\ u^2 =$

$= (5\cdot\ln(5) - 3/4) - (3\cdot\ln(3) + 1/4)\ u^2 =$ $\mathbf{(5\cdot\ln(5) - 3\cdot\ln(3) - 1)\ u^2 \cong 3'7513527\ u^2}$.

** $\int \ln(x+2).dx$, que es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)

Tomamos $u = \ln(x+2)$ de donde $du = dx/(x+2)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$\int \ln(x+2)\cdot dx = x\cdot\ln(x+2) - \int [x/(x+2)]dx = x\cdot\ln(x+2) - \int [(x+2-2)/(x+2)]dx =$

$= x\cdot\ln(x+2) - \int [1 - 2/(x+2)]dx = x\cdot\ln(x+2) - \int dx + 2\int dx/(x+2) = x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| + K$

La integral $\int [2x/(2x + e)]dx$ es racional y también se podría haber realizado la división entera.

Ejercicio 3 opción B, Junio 2019 (modelo 1)

[2'5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, considera el sistema de ecuaciones $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Solución

Dada la expresión $\mathbf{X^tA = B^t}$, tomando traspuesta **tenemos** $(X^tA)^t = (B^t)^t \rightarrow (A)^t\cdot(X^t)^t = (B^t)^t \rightarrow \mathbf{A^t\cdot X = B}$.

Matriz de los coeficientes $A^t = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos $\det(A) = \det(A^t) = |A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = (m-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2}{=}$$

$$= (m-1)\cdot\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2}{=} (m-1)\cdot\begin{vmatrix} 3-m & 1 & 2m-1 \\ 1+m & m & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Adjuntos tercera fila}}{=}$$

$= (m-1)\cdot\{\, 0 + (-1)(-1)[3 - m - (2m-1)\cdot(1+m) + 0] \,\} = (m-1)\cdot[3 - m - (2m + 2m^2 - 1 - m] =$
$= (m-1)\cdot(-2m^2 - 2m + 4) = -2\cdot(m-1)\cdot(m^2 + m - 2)$.

De |A| = 0 tenemos (m – 1)·(m^2 + m -2) = 0, de donde m – 1 = 0 (solución m = 1) y m^2 + m – 2 = 0 (soluciones m = 1 y m = -2). Es decir las soluciones de |A| = 0 son m = 1 (doble) y m = -2.

Si m ≠ 1 y m ≠ -2, |A| = |A^t| ≠ 0, rango(A^t) = rango((A^t)*) = 3 = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, **sistema compatible y determinado, solución única.**

Si m = 1, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 1** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si m = -2, $A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $(A^t)^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A^t como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = -8 - 1 = -9 ≠ 0, rango(A) = 2.

En (A^t)* como $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+2C_1 \\ C_3+2C_1 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & -9 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila = (-1)(1)(-81 + 135) = - 54 ≠ 0, **rango((A^t)*) = 3**

Como **rango(A^t) = 2 ≠ rango((A^t)*) = 3**, por el Teorema de Rouche, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

Vamos a intentar hacerlo en la forma que lo dan, es decir $X^tA = B^t$.

De $X^tA = B^t$ → $\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$, →

$\begin{pmatrix} (2-m)x+y+mz & x+my+z & (2m-1)x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos el sistema $\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2-1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases}$, y su matriz de los coeficientes sería $A^t = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es la que teníamos de antes y el procedimiento sería el mismo.

Ejercicio 4 opción B, Junio 2019 (modelo 1)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 2) y C(0, 2, 1).
a) [1'25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.
b) [1'25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 2) y C(0, 2, 1).
a)
Halla el área de dicho triángulo

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir la mitad del módulo (|| ||) determinado por los vectores **AB** y **AC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**AB**x**AC**||.

AB = (1 - 1, 0 - 1, 2 - 0) = (0, -1, 2);   **AC** = (0 - 1, 2 - 1, 1 - 0) = (-1, 1, 1)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(-1 - 2) - **j**(0 + 2) + **k**(0 - 1) = (-3, -2, -1);

||**AB**x**AC**|| = √($(3)^2+(2)^2+(1)^2$) = √(14) = 16√(3)
Área del triángulo es = (1/2)·||ABxAC|| = (1/2)·√(14) u^2
b)
Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Sabemos que cos(α) = cos(<**AB**, **AC**>)| = $\frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$, de donde α = arcos$\left(\frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\right)$.

AB = (0, -1, 2); **AC** = (-1, 1, 1)

AB•AC = 0 – 1 + 2 = 1; ||**AB**|| = $\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; ||**AC**|| = $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Luego el coseno pedido es cos(α) = cos(<**AB**, **AC**>)| = $\frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cong 0'2581988897$,