INTEGRAL INDEFINIDA
MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

El inglés Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), aunque antagonistas, los dos principales creadores del cálculo infinitesimal.

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA[1] *(Ver pág. 338 del libro de ed. Anaya)*

Dada f(x)=2x nos preguntamos ¿qué función F(x) es tal que al derivarla nos da f(x)? Claramente es $F(x)=x^2$, pero no sólo esa sino también $F(x)=x^2+2$, $F(x)=x^2-5$,... y en general $F(x)=x^2+C$ (siendo C cte.). A F(x) se le llama "**primitiva** de f(x)". La notación que se sigue es:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

integrando — primitiva de f(x) — cte. de integración

A $\int f(x)\,dx$ se le llama "integral (indefinida) de f(x)". Nótese que una f(x) puede tener[2] infinitas primitivas, que se diferencian, como vemos, en una constante.

Ejemplos:

a) $\int 2x\,dx = x^2 + C$ pq. $\left(x^2\right)' = 2x$

b) $\int 3x^2\,dx =$

c) $\int \cos x\,dx =$

d) $\int e^x\,dx =$

e) $\int dx =$

f) $\int 2\,dx =$

La cte. de integración C a veces se omite pues se sobreentiende. Nótese que la integración es la operación contraria de la derivación, por lo que la tabla de integrales (ver anexo final de este libro) es prácticamente idéntica a la de derivadas pero al revés. Vamos a justificar, por ejemplo, el caso de <u>la integral de una potencia</u>, que, por cierto, <u>es la más utilizada</u> (el resto se haría igual):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

Ejercicio: Utilizando la tabla, hallar las siguientes integrales inmediatas, y efectuar la comprobación:

a) $\int x^4\,dx =$

b) $\int x\,dx =$

c) $\int \frac{1}{x^3}\,dx =$

d) $\int \sqrt{x}\,dx =$

e) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

f) $\int \frac{1}{x}\,dx =$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$

h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx =$

[1] En el próximo tema veremos el concepto de integral definida, y entonces comprenderemos que el obtener una primitiva de una función es relevante, pues nos permitirá obtener el área bajo una curva.

[2] Más adelante veremos que no todas las funciones tienen por qué tener una primitiva, al menos "elemental".

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL *(Ver pág. 338 del libro de ed. Anaya)*

Son consecuencia de las propiedades de la derivada:

1) $\boxed{\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)}$ es decir, "la integral de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales".

2) $\boxed{\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx}$ es decir, "las constantes **multiplicativas** pueden entrar o salir de la integral".

La utilización conjunta de ambas propiedades, junto con la tabla, nos permite resolver un gran número de integrales. Para ello, a veces tendremos que introducir o extraer una constante en el integrando, según convenga, como veremos en el siguiente

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales inmediatas (al margen figura cada primitiva); se recomienda efectuar la comprobación:

1) $\int \left(x^2 + x + 1\right) \, dx =$ $\qquad = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

2) $\int 6x^3 \, dx =$ $\qquad = \frac{3x^4}{2} + C$

3) $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right) \, dx =$ $\qquad = x^3 + x^2 + x + C$

4) $\int (x+1)^2 \, dx =$ $\qquad = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

(de 2 formas)

5) $\int (x+1)^{50} \, dx =$ $\qquad = \frac{(x+1)^{51}}{51} + C$

6) $\int 2x \left(x^2+1\right)^3 \, dx =$ $\qquad = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$

7) $\int x \left(x^2-2\right)^4 \, dx =$ $\qquad = \frac{(x^2-2)^5}{10} + C$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$ $\qquad = -\sqrt{1-x^2} + C$

9) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5} \, dx =$ $\qquad = \ln\left(x^3+x+5\right) + C$

(*) 10) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx =$ $= x - \text{arctg}\, x + C$

(de 2 formas)

11) $\int \frac{x^2}{x^3+8}\,dx =$ $= \ln \sqrt[3]{x^3+8} + C$

12) $\int \frac{1}{x^3}\,dx =$ $= -\frac{1}{2x^2} + C$

13) $\int \text{ctg}\, x\,dx =$ $= \ln \text{sen}\, x + C$

14) $\int \text{tg}\, x\,dx =$ $= \ln \sec x + C$

15) $\int -\frac{5}{x^2}\,dx =$ $= \frac{5}{x} + C$

16) $\int \frac{\text{sen}\, 2x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx =$ $= \ln(1+\text{sen}^2 x) + C$

17) $\int e^{2x+1}\,dx =$ $= \frac{e^{2x+1}}{2} + C$

18) $\int 3^x\,dx =$ $= \frac{3^x}{\ln 3} + C$

19) $\int x\, e^{x^2}\,dx =$ $= \frac{e^{x^2}}{2} + C$

20) $\int \cos x\, e^{\text{sen}\, x}\,dx =$ $= e^{\text{sen}\, x} + C$

21) $\int \cos 2x\,dx =$ $= \frac{\text{sen}\, 2x}{2} + C$

22) $\int \text{sen}(2x+8)\,dx =$ $= -\frac{\cos(2x+8)}{2} + C$

23) $\int x \cos(x^2+1)\,dx =$ $= \frac{\text{sen}(x^2+1)}{2} + C$

24) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx =$ $= \text{sen}(\ln x) + C$

(*) 25) $\int tg^2x\, dx =$ $\qquad = -x + tg\, x + C$

(*) 26) $\int tg^3x\, dx =$ $\qquad = \frac{tg^2x}{2} + \ln(\cos x) + C$

27) $\int sen^3x \cos x\, dx =$ $\qquad = \frac{sen^4x}{4} + C$

28) $\int \frac{\cos x}{sen^2x}\, dx =$ $\qquad = -\operatorname{cosec} x + C$

(*) 29) $\int \left(tg^3x + tg^5x\right) dx =$ $\qquad = \frac{tg^4x}{4} + C$

30) $\int \frac{x+1}{x}\, dx =$ $\qquad = x + \ln|x| + C$

31) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$ $\qquad = 2\arcsen x + C$

32) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx =$ $\qquad = \arcsen x^2 + C$

33) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx =$ $\qquad = \arcsen e^x + C$

34) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\, dx =$ $\qquad = \arcsen \ln\, |x| + C$

(*) 35) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\, dx =$ $\qquad = 2\arcsen \sqrt{x} + C$

CONSECUENCIA: Para adquirir una buena técnica de integración es condición previa el saberse perfectamente la tabla de derivadas

36) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx =$ $\qquad = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + C$

37) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\, dx =$ $\qquad = \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + C$

38) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx =$ $\qquad = -\frac{1}{x-1} + C$

(*) 39) $\int \frac{dx}{x^2+2x+1} =$ $\qquad = -\frac{1}{x+1} + C$

(*) 40) $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx=$ $\qquad =\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C$

41) $\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx=$ $\qquad =\frac{3x^2}{2}+7x+29\ln|x-4|+C$

42) $\int \sqrt{x}\,\left(x^2+x+1\right)\,dx=$ $\qquad =\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

43) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx=$ $\qquad =\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$

44) $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx=$ $\qquad =\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)^2+C$

45) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx=$ $\qquad =\ln|1-\cos x|+C$

46) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx=$

Ejercicios final tema: 1 a 5
Ejercicios PAEG: sept 2012 2A, jun 2011 2A, sept 2005 2B
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 339: 1; pág. 340: 2 y 3; pág. 342: 1 y 2; pág. 345: 1 y 2; pág. 356: 1 a 12

III) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN o CAMBIO DE VARIABLE *(Ver pág. 342 libro de ed. Anaya)*

Se trata de resolver una integral no inmediata $\int f(x)\,dx$ mediante el siguiente procedimiento:

1º) Escogemos el cambio apropiado: x=g(t) y calculamos la diferencial[3] en ambos miembros: $dx=g'(t)\,dt$

2º) Sustituimos las dos expresiones anteriores (**x** y **dx**) en la integral a resolver (con lo que ahora pasará a depender de **t**), simplificamos y, si hemos escogido el cambio adecuado, obtendremos una integral inmediata en **t**, que resolveremos.

3º) Una vez resuelta deshacemos el cambio, es decir, ponemos la expresión obtenida de nuevo en función de **x**

El saber elegir el cambio de variable apropiado en cada caso a veces puede resultar complicado[4], y en cualquier caso lo da la práctica. A veces es algo intuitivo, pero en ciertas integrales (trigonométricas, tipo arco tangente, etc.) pueden darse algunas reglas orientativas:

1. En las integrales NO inmediatas en las que haya $\sqrt{\ }$, suele funcionar el cambio RADICANDO=t^2
2. " " " " " " " " aparezcan $\sqrt{\ }$ de distinto índice, puede funcionar el cambio RADICANDO=$t^{\text{mcm de los índices}}$
3. En las integrales NO inmediatas en las que aparezca a^x, puede ensayarse $a^x=t$
4. Para integrales trigonométricas NO inmediatas existen ciertos cambios establecidos, como veremos en el apdo. VII, al final del tema.

Ejemplo: Resolver $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ mediante[5] el cambio $t^2=x-1$

Ejercicios final tema: 6
Ejercicios PAEG: jun 2007 2A, jun 2010 2B
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 358 y ss.: **25**, 26, 31 y 46

IV) INTEGRAL TIPO ARCOTANGENTE

A) Vamos a ver, en primer lugar, un **caso particular** fácil de resolver:

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx =$

---

[3] De momento bastará con saber que **la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente** (es decir, el dx sería como una especie de unidad de medida).
Ejemplos: $d(x^2)=2x\,dx$, $d(t^3)=3t^2\,dt$, etc. y, en general, $\boxed{x=g(t) \Rightarrow dx=g'(t)\cdot dt}$

[4] En la PAEG, algunas veces se indica al alumno el cambio a realizar, pero no siempre…

[5] En este tipo de integrales con una sola raíz cuadrada puede funcionar el siguiente cambio: radicando=t^2

Ejercicio PAEG: jun 2012 2B

B) Veamos ahora el **caso general**:

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales $\xrightarrow{\text{se resuelve}}$ **1º)** Hallando sus raíces complejas $a \pm bi$
2º) Haciendo el cambio $x-a=bt$ se transforma[6] en $\int \frac{dt}{1+t^2}$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$

Ejercicios final tema: 7

C) Si el numerador es un binomio de 1^er^ grado, se resuelve análogamente, pero la integral resultante será de **tipo neperiano-arcotangente**:

$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales $\xrightarrow{\text{se resuelve}}$ **1º)** Separando en dos integrales: una tipo ln (inmediata) y otra tipo arctg, para lo cual habrá que ajustar constantes en el numerador.
2º) La 2ª integral, la tipo arctg, se resuelve como en el caso anterior, haciendo el cambio $x-a=b\cdot t$

¡IMPORTANTE!: No conviene invertir los dos pasos anteriores, pues entonces se obtiene una primitiva cuya expresión no es del todo correcta[7].

Ejemplo: Ejercicio 8a

[6] Existe otro procedimiento, llamado "completar el cuadrado", pero el que aquí indicamos suele resultar más sencillo.
[7] En realidad sí podría procederse de esa forma, pero al final habría que simplificar la primitiva resultante…

D) Si el **numerador** es **de grado igual o mayor que el denominador**, se efectúa previamente la división polinómica, se reconstruye a continuación el integrando (mediante la regla D=d·C+R), y se integra finalmente aplicando los procedimientos anteriores.

Ejercicios final tema: 8

Ejercicios PAEG: sept 2000 4A, jun 99 2B, sept 2006 2A (caso particular, con división previa), jun 2009 2A (caso particular, con separación previa)

V) INTEGRACIÓN POR PARTES *(Ver pág. 343 del libro de ed. Anaya)*

Esta utilísima técnica se utiliza para hallar, en ciertos casos, la integral de un producto de funciones. Se basa en la diferencial[8] de un producto:

$$d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du \xrightarrow[\text{ambos miembros}]{\text{integramos}} \boxed{\int u\,dv = u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Existen infinidad de reglas mnemotécnicas para esta fórmula, como por ejemplo: "**U**n **d**ía **v**i **u**n **v**iejo **s**oldadito **v**estido **d**e **u**niforme".

Ejemplo: $\int x\, e^x dx =$

Consejos para elegir **u** y **dv**: 1) Hay que elegir un **u** cuya derivada no se complique más.

2) El **dv** restante (¡se tiene que llevar siempre el dx!) ha de resultar fácil de integrar.

Existe una sencilla regla mnemotécnica **para elegir u:**

A → arcsen, arccos, arctg, etc.

L → logaritmo

P → polinomio (o cociente de polinomios)

E → exponencial

S → sen, cos, tg, etc.

[8] Recordar que la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente. Por lo tanto, conserva las mismas propiedades que la derivada; en particular, para la diferencial del producto, se cumple que d(u·v)=v·du+u·dv

Observaciones: **1.** En el caso $\int \text{exponencial} \cdot \text{trigonométrica} \cdot dx$ podemos tantear ambas posibilidades.

2. Es muy frecuente que, al resolver una integral por partes, haya que aplicar la fórmula dos o más veces (como en el apdo. 5 del siguiente ejercicio).

3. En algunos casos, para que dv resulte una integral inmediata, hay que "partir" el polinomio, como en el apdo. 7 del siguiente ejercicio.

4. En otros casos, al aplicar la fórmula, vuelve a aparecer la integral del principio, pero cambiada de signo: en tal caso llamaremos a ésta I, y la despejaremos (Es lo que se conoce como "iteración", como en el apdo. 6 del siguiente ejercicio).

Ejercicios:

1) $\int x \cos x \, dx =$

$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

2) $\int \ln x \, dx =$

$= x \ln x - x + C$

3) $\int \operatorname{arctg} x \, dx =$

$= x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1} + C$

4) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx =$

$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

5) $\int x^2 \cos x \, dx =$

(Hay que proceder 2 veces)

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

6) $\int e^x \cos x \, dx =$

(Por iteración)

$$= \frac{e^x\,(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

7) $\int x^3\, e^{-x^2}\, dx =$

$$= -\frac{x^2+1}{2e^{x^2}} + C$$

Ejercicios final tema: 9
Ejercicios PAEG: sept 2010 2B, sept 2009 2A, jun 98 4A, sept 99 3B, sept 97 3A
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 343: 1 y 2; pág. 344: 3 y 4; pág. 357: 13 y 14

VI) INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Se trata de hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ donde: Q(x) es factorizable (es decir, tiene raíces reales)
grad P(x)<grad Q(x) (en caso contrario los dividimos)

NOTA: Interesa previamente comprobar si el numerador es la derivada del denominador, pues en ese caso sería inmediata: $\int \frac{u'}{u}$ (aunque, como puede imaginarse, algo tan sencillo no es lo habitual...)

El tipo de integral que nos ocupa se resuelve por el **MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**. Dependiendo de cómo sean las raíces de Q(x) tendremos 3 casos:

1º) SÓLO RAÍCES REALES SIMPLES: *(Ver pág. 346 libro de ed. Anaya)*

Ejemplo: $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\, dx$

I) Descomponemos el denominador, teniendo en cuenta que sus raíces son x=1 y x=2:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples[9]:

$$\boxed{\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}} \qquad (*)$$

III) Determinación de las constantes A y B: para ello, multiplicamos ambos miembros de la expresión anterior por el m.c.m. de los denominadores, esto es $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-1)$$

A continuación, lo que funciona es dar a x los valores de las raíces (recuérdese que la expresión anterior se cumple para todo x):

$$x=1 \Rightarrow 3=-A;\ \boxed{A=-3}$$

$$x=2 \Rightarrow \boxed{5=B}$$

IV) Sustituimos en (*****) los valores obtenidos de A y B e integramos cada sumando por separado:

$$\int\frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx=\int\frac{-3}{x-1}\,dx+\int\frac{5}{x-2}\,dx=\boxed{-3\ln(x-1)+5\ln(x-2)+C}\text{, o bien }=\boxed{\ln\frac{(x-2)^5}{(x-1)^3}+C}$$

Ejercicios: **1)** Resolver $\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ haciendo previamente[10] el cambio $e^x=t$ $\left(\text{Soluc}:\ \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-1}}+C\right)$

2) Resolver $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ mediante el cambio $x=t^6$ $\left(\text{Soluc}:\ \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{6\sqrt{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x}+C\right)$

Ejercicios PAEG: jun 2013 2B (+ ∫ trigonométrica inmediata), jun 2000 2A, Sept 98 4A, jun 2008 2A

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 357: 15; pág. 358: 25 d

2º) APARECEN RAÍCES REALES MÚLTIPLES: *(Ver pág. 347 libro ed. Anaya)*

Ejemplo: $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini, obteniendo las raíces x=-1 y x=1 doble:

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples[11]:

---

[9] Este resultado debería ser demostrado, pero ello supera las pretensiones de este estudio. Esta descomposición sólo funciona si grad P(x)<grad Q(x).

[10] Para las dos integrales de este ejercicio recordar los consejos del apdo. III a la hora de escoger un cambio de variable.

[11] También debería ser demostrado.

$$\boxed{\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}} \qquad (**)$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$:

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

A continuación, damos a x los valores de las raíces y, además, otro valor sencillo como por ejemplo x=0 (recuérdese que la anterior expresión se cumple para todo x):

$$x=-1 \Rightarrow 2=4A;\ \boxed{A=1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow 8=2B+2C \\ x=0 \Rightarrow 5=A-B+C \end{array}\right\}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{B=-1/2}$ y $\boxed{C=4}$

IV) Finalmente, sustituimos en (**) los valores obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\frac{1/2}{x+1}dx+\int\frac{-1/2}{x-1}dx+\int\frac{4}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+4\int(x-1)^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+4\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=\boxed{\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x-1}-\frac{4}{x-1}+C}\text{, o bien, }=\boxed{\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{4}{x-1}+C}$$

Ejercicios: **1)** $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}dx$ $\qquad\left(\text{Soluc: }\ln\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)}+C\right)$

2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-x^3}dx$ $\qquad\left(\text{Soluc: }\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C\right)$

Ejercicios PAEG: sept 2011 2A, sept 2001 4A, sept 2002 2A, jun 97 3A, sept 2007 2A, jun 2006 2A

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 348: 3 y 4; pág. 357: 16 (se recomienda, además, realizar los ejercicios resueltos de las págs. 349 a 354)

3º) APARECEN RAÍCES COMPLEJAS[12]:

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

(Nótese que tiene una única raíz real, x=–1, y dos raíces complejas)

[12] Este tipo de integrales no entran en la PAEG de Castilla-La Mancha, al menos en el presente curso 2013-2014, salvo el caso sencillo tipo arcotangente visto en el apdo. IV A

II) Descomposición del integrando en fracciones simples:

$$\boxed{\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}} \qquad \textbf{(***)}$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$:

$$1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$$

A continuación, damos a x el valor de la única raíz real, x=–1, y además, otros dos valores arbitrarios sencillos:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow 1=3A;\ \boxed{A=1/3} \\ x=0 \Rightarrow 1=A+N \\ x=1 \Rightarrow 1=A+(M+N)\cdot 2 \end{array}\right\}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{M=-1/3}$ y $\boxed{N=2/3}$

IV) Finalmente, sustituimos en (*******) los valores recién obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

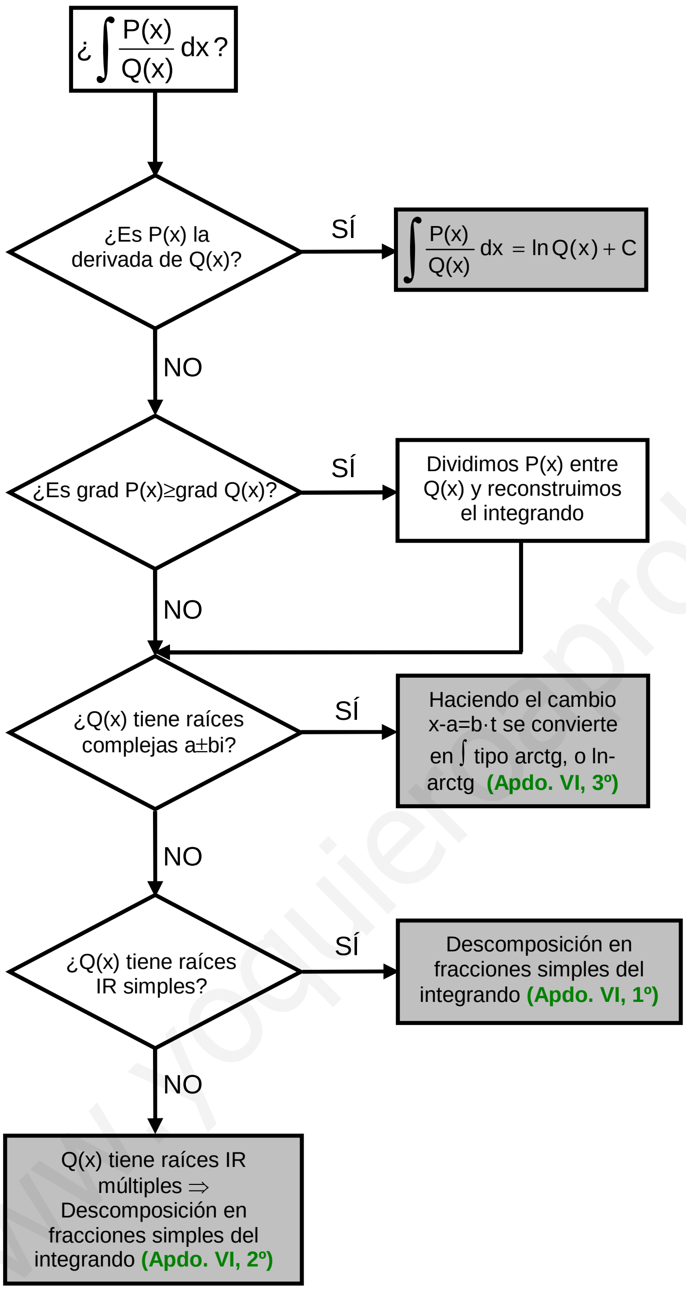
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx=\underbrace{\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx}_{\text{inmediata}}+\underbrace{\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx}_{\text{tipo ln-arctg}}=$$

Ejercicios: **1)** $\displaystyle\int \frac{5x-12}{x^3-6x^2+13x-10}\,dx$ $\left(\text{Soluc: } \ln\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}+5\,\text{arctg}(x-2)+C\right)$

2) $\displaystyle\int \frac{x-6}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$ $\left(\text{Soluc: } \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}+\text{arctg}\frac{x}{2}+C\right)$

Ejercicios final tema: 10
Ejercicios PAEG: jun 2001 2A

RESUMEN: PROCESO LÓGICO A LA HORA DE INTEGRAR COCIENTES DE POLINOMIOS



VII) INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

- En algunos casos se resuelven transformando el integrando mediante identidades trigonométricas; he aquí algunas de las más habituales:

$$\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \Longrightarrow \cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x \qquad \boxed{\cos x=\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{sen}^2 x=1-\cos^2 x \qquad \boxed{\mathrm{sen}\, x=\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$\begin{array}{l} 1=\cos^2 x+\mathrm{sen}^2 x \\ \cos 2x=\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{Restando}} 1-\cos 2x=2\mathrm{sen}^2 x \qquad \boxed{\mathrm{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\Downarrow \text{Sumando}$$

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \qquad \boxed{\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Ejemplos:

[13]**1)** $\int \mathrm{sen}^2 x\, dx=$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4}+C$$

2) $\int \cos^3 x\, dx=\int \cos x\,(1-\mathrm{sen}^2 x)\, dx=$

$$=\mathrm{sen}\, x-\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}+C$$

[14]**3)** $\int \mathrm{sen}^4 x\, dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\frac{1-\cos 2x}{2}\, dx=$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4}+\frac{\mathrm{sen}\, 4x}{32}+C$$

4) $\int \frac{1-\mathrm{sen}\, x}{1+\mathrm{sen}\, x}\, dx=\int \frac{(1-\mathrm{sen}\, x)^2}{(1+\mathrm{sen}\, x)(1-\mathrm{sen}\, x)}\, dx=$

$$=x+2\mathrm{tg}\, x-2\sec x+C$$

5) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx=$

(Haciendo el cambio de variable x=sen t)

$$=\frac{\mathrm{arcsen}\, x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

[13] Puede ensayarse, o bien utilizar la identidad trigonométrica correspondiente (lo más rápido y recomendable), o bien por partes, eligiendo u=sen x, y reemplazando a continuación $\cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x$, con lo cual saldrá por iteración (proceso muy tedioso…).

[14] También puede intentarse por partes, eligiendo $u=\mathrm{sen}^3 x$, y reemplazando posteriormente $\cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x$; finalmente, habrá que aplicar iteración.

- También pueden resolverse, en ciertos casos, mediante el apropiado cambio de variable; básicamente, hay tres casos principales, que se presentan a continuación, junto con todos los elementos restantes para hacer el cambio:

1º Si el integrando es impar en sen x:

$$\boxed{\cos x = t} \xrightarrow{\text{Diferenciamos ambos miembros}} -\operatorname{sen} x\ dx = dt \quad \boxed{dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}}$$

2º Si el integrando es impar en cos x:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = t} \xrightarrow{\text{Diferenciamos ambos miembros}} \cos x\ dx = dt \quad \boxed{dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \boxed{\cos x = \sqrt{1-t^2}}$$

3º Si el integrando es par en sen x y cos x:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = t} \xrightarrow{\text{Diferenciamos ambos miembros}} (1+\operatorname{tg}^2 x)\ dx = dt \quad \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

Los dos primeros cambios suelen funcionar muy bien, no así el tercero, que suele conducir a integrales racionales muy arduas, con raíces complejas múltiples. Finalmente, conviene saber que existe un **cambio general**, **tgx/2=t**, aunque también puede dar lugar a un desarrollo laborioso.

Ejemplos:

6) $\int \cos^3 x\, dx =$

(Haciendo el cambio de variable sen x=t)

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

7) $\int \operatorname{sen}^5 2x\, dx =$

(Haciendo el cambio de variable cos 2x=t)

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^3 2x}{3} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C$$

Ejercicios final tema: 11 a 15

Ejercicios PAEG: sept 2008 2A (teórico-práctico)

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 357 y ss.: 17 a 24, 32, 33, 44, 45, 56 y 57 (integrandos de todo tipo)
págs. 358 y ss.: 27 a 30, 34 a 42, 47 a 49, 51 y 60 (teórico-prácticos)

TABLA de INTEGRALES INMEDIATAS

	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
1	$\int dx = x$	
2	$\int k\, dx = kx$	
3	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$	$\int u'\, u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$
4	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$	$\int \frac{u'}{u} = \ln u$
5	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int u'\, a^u = \frac{a^u}{\ln a}$
6	$\int e^x\, dx = e^x$	$\int u'\, e^u = e^u$
7	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$	$\int u' \cos u = \operatorname{sen} u$
8	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$	$\int u' \operatorname{sen} u = -\cos u$
9	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\, dx = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} = \int u' \left(1+\operatorname{tg}^2 u\right) = \int u' \sec^2 u = \operatorname{tg} u$
10	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = \int u' \left(1+\operatorname{ctg}^2 u\right) = \int u' \operatorname{cosec}^2 u = -\operatorname{ctg} u$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u$
12	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x$	$\int \frac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u$

En esta tabla, ***k*** y ***n*** son números reales, ***a*** es un número real positivo, y ***u*** es una función.

EJERCICIOS de INTEGRAL INDEFINIDA	2º BACH.

1. Calcular las siguientes integrales **potenciales** (se recomienda hacer la comprobación):

a) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^5}{6}\,dx$ **c)** $\int x^{2/3}dx$ **d)** $\int \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ **e)** $\int t^2t^3dt$ **f)** $\int x\,x^{2/3}\,dx$

g) $\int \frac{t^3}{t^2}\,dt$ **h)** $\int \frac{x^{2/3}}{x^{1/3}}\,dx$ **i)** $\int \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,dx$ **j)** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ **k)** $\int \left(t^2\right)^3dt$ **l)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$

m) $\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx$ **n)** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$ **o)** $\int \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{x}\,dx$ **p)** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$

(Soluc: **a)** $-1/x$ **b)** $x^6/36$ **c)** $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$ **d)** $3\sqrt[3]{x}$ **e)** $t^6/6$ **f)** $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$ **g)** $t^2/2$ **h)** $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}$ **i)** $\frac{6\sqrt[6]{x^{11}}}{11}$
j) $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$ **k)** $t^7/7$ **l)** $2\sqrt{x}$ **m)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$ **n)** $3\sqrt[3]{x}$ **o)** $\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}$ **p)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+4\sqrt{x}$)

2. Calcular las siguientes integrales de **funciones compuestas**:

a) $\int (x+1)^2dx$ **b)** $\int (7x+5)^2dx$ **c)** $\int 2x\,(x^2+1)\,dx$ **d)** $\int 3x^2(x^3+1)\,dx$ **e)** $\int t\,(t^2+3)\,dt$

f) $\int x^2(x^3+2)\,dx$ **g)** $\int (2x+1)^{-3}dx$ **h)** $\int x^2(x^3+1)^{-7}dx$ **i)** $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$ **j)** $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

k) $\int \frac{1}{t^2+2t+1}\,dt$ **l)** $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x+1}$ **m)** $\int x\,\sqrt{1+x^2}\,dx$ **n)** $\int x\,\sqrt{1-x^2}\,dx$ **o)** $\int (x+1)(x^2+2x+5)^6dx$

p) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^4}\,dx$ **q)** $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ **r)** $\int (16x+1)\,(8x^2+x-5)\,dx$ **s)** $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx$ **t)** $\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$

u) $\int \cos x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ **v)** $\int \cos x\,\mathrm{sen}^2x\,dx$ **w)** $\int \mathrm{sen}x\,\cos^2x\,dx$ **x)** $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$ **y)** $\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2x}\,dx$

z) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ **α)** $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ **β)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **γ)** $\int \frac{\mathrm{arcsen}^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **δ)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arcsen}^2x}$

ε) (*) $\int \frac{\mathrm{arctg}\;x/2}{4+x^2}\,dx$

(Soluc: **a)** $(x+1)^3/3$ **b)** $(7x+5)^3/21$ **c)** $(x^2+1)^2/2$ **d)** $(x^3+1)^2/2$ **e)** $(t^2+3)^2/4$ **f)** $(x^3+2)^2/6$
g) $\frac{-1}{4(2x+1)^2}$ **h)** $\frac{-1}{18\,(x^3+1)^6}$ **i)** $\frac{-1}{2(2x+1)}$ **j)** $\frac{-1}{x^2+x+1}$ **k)** $\frac{-1}{t+1}$ **l)** $\frac{-1}{2(x+1)^2}$
m) $\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3}$ **n)** $-\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}$ **o)** $(x^2+2x+5)^7/14$ **p)** $\frac{-1}{9(x^3+1)^3}$ **q)** $\frac{2\sqrt{3x+1}}{3}$ **r)** $(8x^2+x-5)^2/2$
s) $2\sqrt{x+1}$ **t)** $\sqrt{x^2+1}$ **u)** $\mathrm{sen}^2x/2$ o $-\cos^2x/2$ **v)** $\mathrm{sen}^3x/3$ **w)** $-\cos^3x/3$ **x)** $\frac{\mathrm{arc\ tg}^2x}{2}$
y) $-\mathrm{cosec}\,x$ **z)** $\ln^3x/3$ **α)** $-1/\ln x$ **β)** $\ln^2x/2$ **γ)** $\frac{\mathrm{arc\ sen}^3x}{3}$ **δ)** $\frac{-1}{\mathrm{arc\ sen}\,x}$
ε) $\frac{\mathrm{arctg}^2\,x/2}{4}$) NOTA: En todas las soluciones se omite, por razones de espacio, la cte. de integración C.

3. Calcular las siguientes integrales de **tipo logarítmico**:

a) $\int 4x^{-1}dx$ **b)** $\int \frac{1}{x-1}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{3x+5}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$ **e)** $\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$

f) $\int \frac{2x^2}{6x^3+1}\,dx$ **g)** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ **h)** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}\,dx$ **i)** $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **j)** $\int \frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$

k) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ **l)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$ **m)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{arcsen}x}\,dx$ **n)** $\int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}x}\,dx$ **o) (*)** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx$

(Soluc: **a)** $\ln x^4$ **b)** $\ln(x-1)$ **c)** $\ln\sqrt[3]{3x+5}$ **d)** $\frac{\ln(ax+b)}{a}$ **e)** $\ln\sqrt[3]{x^3+2}$ **f)** $\ln\sqrt[9]{6x^3+1}$ **g)** $\ln(x^2+x+1)$ **h)** $\ln\sqrt[6]{3x^2-6x+5}$ **i)** $\ln(1+e^x)$ **j)** $\ln\frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}$ **k)** $\ln(\ln x)$ **l)** $\ln(\operatorname{arctg}x)$ **m)** $\ln(\operatorname{arcsen}x)$ **n)** $\ln(1+\operatorname{tg}x)$ **o)** $\ln\operatorname{sen}^2\sqrt{x}$)

4. Calcular las siguientes integrales de **tipo exponencial**:

a) $\int e^{-x}\,dx$ **b)** $\int e^{2x}\,dx$ **c)** $\int e^{-2x}\,dx$ **d)** $\int e^{2x+1}\,dx$ **e)** $\int e^{-2x+1}\,dx$

f) $\int x\,e^{x^2-22}\,dx$ **g)** $\int x\,e^{-x^2}dx$ **h)** $\int x^2\,e^{x^3+1}\,dx$ **i)** $\int (2x+1)\,e^{x^2+x-1}\,dx$ **j)** $\int \cos x\,e^{\operatorname{sen}x}dx$

k) $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}\,dx$ **l)** $\int \sec^2 x\;e^{\operatorname{tg}x}\,dx$ **m)** $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$ **n)** $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **o)** $\int 12^x dx$

p) $\int (6^x)^2\,dx$ **q)** $\int \frac{7^x}{5^x}\,dx$ **r)** $\int 5^x\,9^x\,dx$

(Soluc: **a)** $-1/e^x$ **b)** $e^{2x}/2$ **c)** $\frac{-1}{2\,e^{2x}}$ **d)** $e^{2x+1}/2$ **e)** $-e^{-2x+1}/2$ **f)** $\frac{e^{x^2-22}}{2}$ **g)** $-\frac{1}{2\,e^{x^2}}$ **h)** $\frac{e^{x^3+1}}{3}$ **i)** e^{x^2+x-1} **j)** $e^{\operatorname{sen}x}$ **k)** x **l)** $e^{\operatorname{tg}x}$ **m)** $e^{\operatorname{arctg}x}$ **n)** $e^{\operatorname{arcsen}x}$ **o)** $12^x/\ln 12$ **p)** $36^x/\ln 36$ **q)** $\frac{(7/5)^x}{\ln 7/5}$ **r)** $\frac{45^x}{\ln 45}$)

5. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas sencillas**:

a) $\int \cos(-2x)\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{3}\operatorname{sen}x\,dx$ **c)** $\int \cos\frac{x}{3}\,dx$ **d)** $\int \operatorname{sen}(x+1)\,dx$ **e)** $\int \cos(2x+5)\,dx$

f) $\int \operatorname{sen}(-x+1)\,dx$ **g)** $\int 3\cos(2x+6)\,dx$ **h)** $\int x\operatorname{sen}x^2\,dx$ **i)** $\int 2x\cos(x^2+255)\,dx$ **j)** $\int x\operatorname{sen}(3x^2+7)\,dx$

k) $\int x\cos(-3x^2-5)\,dx$ **l)** $\int 7x^2\operatorname{sen}(4x^3+5)\,dx$ **m)** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$ **n)** $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **o)** $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$

p) $\int \frac{\cos(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}\,dx$

(Soluc: **a)** $\frac{\operatorname{sen}2x}{2}$ **b)** $-\frac{\cos x}{3}$ **c)** $3\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ **d)** $-\cos(x+1)$ **e)** $\frac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2}$ **f)** $\cos(-x+1)$

g) $\frac{3}{2}\text{sen}(2x+6)$ **h)** $-\frac{\cos x^2}{2}$ **i)** $\text{sen}(x^2+255)$ **j)** $-\frac{\cos(3x^2+7)}{6}$ **k)** $-\frac{\text{sen}(-3x^2-5)}{6}$ **l)** $-\frac{7\cos(4x^3+25)}{12}$

m) $\text{sen}\sqrt{x}$ **n)** $-2\cos\sqrt{x}$ **o)** $\text{sen}(\ln x)$ **p)** $\text{sen}(\text{arctg } x)$)

6. Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución o **cambio de variable**:

a) $\int (x+2)^{10}\, x\, dx$ *mediante x+2=t* **b)** $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ *haciendo t^2=x-1* **c)** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ *con t=e^x*

d) $\int \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$ *haciendo x+1=t* **e)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$ **f)** $\int \frac{(x+1)^{10}}{x}\, dx$

(Soluc: **a)** $\frac{(x+2)^{12}}{12}-2\frac{(x+2)^{11}}{11}$ **b)** $2\left(\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5}+\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right)$ **c)** $\text{arc tg } e^x$ **d)** $-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}$ **e)** $2\left(\sqrt{x}-\text{arctg}\sqrt{x}\right)$

f) $\frac{(x+1)^{10}}{10}+\frac{(x+1)^9}{9}+\dots+\frac{(x+1)^2}{2}+x+1+\text{Ln}\, x$)

Recordar algunos consejos:

1. En las integrales NO inmediatas en las que haya $\sqrt{\ }$, suele funcionar el cambio RADICANDO=t^2
2. “ “ “ “ “ “ “ “ aparezcan $\sqrt{\ }$ de distinto índice, puede funcionar el cambio RADICANDO=$t^{\text{mcm de los índices}}$
3. En las integrales NO inmediatas en las que aparezca a^x, puede ensayarse a^x=t
4. Para integrales trigonométricas NO inmediatas ver los cambios vistos en el tema.

7. Calcular las siguientes integrales de **tipo arco tangente**:

a) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$ **b)** $\int \frac{1}{9x^2+6x+2}\, dx$ **c)** $\int \frac{x^3}{1+x^8}\, dx$ **d)** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ **e)** $\int \frac{\sec^2 x}{1+\text{tg}^2 x}\, dx$

f) $\int \frac{a^x}{1+a^x}\, dx$ **g)** $\int \frac{2^x}{1+4^x}\, dx$ **h)** $\int \frac{3^x}{1+9^x}\, dx$ **i)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$ **j)** $\int \frac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}\, dx$

k) $\int \frac{3x+27}{1+(3x+27)^4}\, dx$ **l)** $\int \frac{1}{3+x^2}\, dx$ **m)** $\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\, dx$ **n)** $\int \frac{1}{x^2+4}\, dx$

(Soluc: **a)** arctg(x+1) **b)** $\frac{\text{arctg}(3x+1)}{3}$ **c)** $\frac{\text{arctg } x^4}{4}$ **d)** arctg e^x **e)** x **f)** $\frac{\ln(1+a^x)}{\ln a}$

g) $\frac{\text{arctg} 2^x}{\ln 2}$ **h)** $\frac{\text{arctg} 3^x}{\ln 3}$ **i)** $2\text{arctg}\sqrt{x}$ **j)** arctg(lnx) **k)** $\frac{\text{arctg}(3x+27)^2}{6}$ **l)** $\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$

m) $\frac{1}{2}\text{arctg}(2x+1)$ **n)** $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}$)

8. Calcular las siguientes integrales de **tipo neperiano-arco tangente**:

a) $\int \frac{x}{x^2+2x+17}\, dx$ **b)** $\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\, dx$ **c)** $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$ **d)** $\int \frac{x+1}{x^2+6x+13}\, dx$ **e)** $\int \frac{x+1}{25+x^2}\, dx$

f) $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\, dx$ **g)** $\int \frac{2x+7}{x^2+x+1}\, dx$ **h)** $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\, dx$ **i)** $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13}\, dx$ **j)** $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13}\, dx$

k) $\int \frac{2x+4}{x^2+4}\, dx$

(Soluc:
a) $\ln\sqrt{x^2+2x+17}-\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x+1}{4}$
b) $\ln\sqrt{x^2+2x+2}-2\text{arctg}(x+1)$
c) $\ln\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
d) $\ln\sqrt{x^2+6x+13}-\text{arctg}\frac{x+3}{2}$
e) $\ln\sqrt{x^2+25}+\frac{1}{5}\text{arctg}\frac{x}{5}$
f) $\ln\sqrt{x^2-2x+5}+2\ \text{arctg}\frac{x-1}{2}$
g) $\ln(x^2+x+1)+4\sqrt{3}\ \text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
h) $\ln\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$
i) $\ln\sqrt{x^2-6x+13}+2\ \text{arctg}\frac{x-3}{2}$
j) $\ln(x^2-4x+13)+3\ \text{arctg}\frac{x-2}{3}$
k) $\ln(x^2+4)+2\ \text{arctg}\frac{x}{2}$)

9. Calcular **por partes** las siguientes integrales:

a) $\int x\ \ln x\, dx$ **b)** $\int \sqrt{x}\ \ln x\, dx$ **c)** $\int x^2 \ln x\, dx$ **d)** $\int \ln^2 x\, dx$ **e)** $\int x^2 e^x\, dx$

f) $\int \ln(x+1)\, dx$ **g)** $\int \arccos x\, dx$ **h)** $\int x^2\ \cos x\, dx$ **i)** $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$ **j)** $\int (x^2-2x-1)\ e^x\, dx$

k) $\int e^x\ \text{sen}\ x\, dx$ **l)** $\int (x^2+1)\ e^{-x}\, dx$ **m)** $\int x^3\ \cos x^2\, dx$ **n)** $\int x^2 e^{2x+1}\, dx$ **o)** $\int (x^2+1)\ \text{sen}\, 2x\, dx$

(Soluc:
a) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$
b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}$
c) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$
d) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x$
e) $e^x(x^2-2x+2)$
f) $x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)$
g) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$
h) $x^2\text{sen}x+2x\cos x-2\text{sen}x$
i) $-\frac{x^2+1}{2e^{x^2}}$
j) $e^x(x^2-4x+3)$
k) $\frac{e^x(\text{sen}x-\cos x)}{2}$
l) $-\frac{x^2+2x+3}{e^x}$
m) $\frac{1}{2}x^2\ \text{sen}\ x^2+\frac{1}{2}\cos x^2$
n) $\frac{x^2}{2}e^{2x+1}-\frac{x}{2}e^{2x+1}+\frac{1}{4}e^{2x+1}$)

10. Calcular las siguientes integrales **racionales**:

a) $\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ **b)** $\int\frac{x^2-6x+7}{x^3-4x^2+x+6}dx$ **c)** $\int\frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4}dx$ **d)** $\int\frac{1}{x^2-5x}dx$

e) $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ **f)** $\int\frac{2x^3-5x^2+4x-2}{x^2-3x+2}dx$ **g)** $\int\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}dx$ **h)** $\int\frac{x^2-2x+10}{x^3-3x+2}dx$

i) $\int\frac{7x^2+3x+5}{x^3+x}dx$ **j)** $\int\frac{9x+23}{x^2+6x+9}dx$ **k)** $\int\frac{8x^2-2x-1}{x^3-x^2+4x-4}dx$ **l)** $\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$

m) $\int\frac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$ **n)** $\int\frac{2x^2-8x-1}{2x^2-7x+3}dx$ **o)** $\int\frac{2x+1}{x^2+x-6}dx$ **p)** $\int\frac{x+2}{x^2-x-6}dx$

q) $\int\frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4}dx$ **r)** $\int\frac{dx}{e^x+1}$

(Soluc:
a) $\ln\frac{(x-3)^7}{(x-2)^5}$
b) $\ln\frac{\sqrt[3]{x-2}\ \sqrt[6]{(x+1)^7}}{\sqrt{x-3}}$
c) $\ln(x^2-x-2)-\frac{1}{x-2}$
d) $\ln\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}$
e) $\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{4}{x-1}$
f) $x^2+x+\ln[(x-1)(x-2)^2]$
g) $\ln\left[(x-1)\ \sqrt{x^2+2x+2}\right]-2\text{arctg}(x+1)$
h) $\ln\frac{(x+2)^2}{(x-1)}-\frac{3}{x-1}$
i) $\ln\left[x^5(x^2+1)\right]+3\text{arctg}\ x$
j) $\ln(x+3)^9+\frac{4}{x+3}$
k) $\ln\left[(x-1)\cdot\sqrt{\left(x^2+4\right)^7}\right]+\frac{5}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}$
l) $\frac{x^2}{2}+x+\ln(x^2-3x+2)$
m) $\ln(x^2-3x+2)-\frac{1}{x-1}$
n) $x-\ln\frac{\sqrt[5]{(x-3)^7}}{\sqrt[10]{(2x-1)^9}}$
o) $\ln(x^2+x-6)$
p) $\ln(x-3)$
q) $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-x-2)-\frac{1}{x-2}$
r) $x-\ln(e^x+1)$)

11. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas no inmediatas**, haciendo cambios o transformando los integrandos:

a) $\int \cos^5 x\, dx$ (Hacer senx=t) **b)** $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ (Hacer cosx=t) **c)** $\int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x}\, dx$ (Descomponer el integrando)

d) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$ **e)** $\int \sec x\, dx$ **f)** $\int \cos x \operatorname{ctg}^2 x\, dx$ $\left(\text{Sustituir } \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1\right)$

g) $\int \cos^2 3x\, dx$

(Soluc: **a)** $\operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$ **b)** $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5}$ **c)** $\sec x - \ln \cos x$ **d)** $\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}$
e) $\ln\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + 1}{1 - \operatorname{sen} x}}$ **f)** $-\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x$ **g)** $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12}$)

12. Calcular **por el método más adecuado** (entre paréntesis figura una ayuda) las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ (inmediata) **b)** $\int \frac{x-1}{3x^2 - 6x + 5}\, dx$ (tipo ln) **c)** $\int (x-1)\, e^x\, dx$ (por partes)

d) $\int (x^2 - 2x - 3) \ln x\, dx$ (por partes) **e)** $\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$ (raíces $\Re$ simples) **f)** $\int \frac{x+5}{x^2 + x - 2}\, dx$ (raíces$\Re$ simpl

g) $\int \frac{6x+8}{x^2 + 2x + 5}\, dx$ (ln-arctg) **h)** $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 4}\, dx$ (raíces $\Re$ simples) **i)** $\int \sec^3 x\, dx$ (cambio senx=t)

j) $\int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$ (cambio senx=t) **k)** $\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}\, dx$ (transformar el integrando) **l)** $\int \cos 3x \operatorname{sen}^2 3x\, dx$ (inmediata)

m) $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$ (por partes) **n)** $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ (por partes) **o)** $\int x^2 e^{3x}\, dx$ (por partes)

p) $\int \frac{x-3}{x^2 + 49}\, dx$ (ln-arctg) **q)** $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$ (raíces$\Re$ simples) **r)** $\int x \ln(x+1)\, dx$ (por partes)

s) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$ (inmediata) **t)** $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$ **u)** $\int x\left[\ln(x^2+1) - e^{-x}\right] dx$

v) $\int \frac{1+2x}{1+x^2}\, dx$ **w)** $\int \frac{1+x}{1-x}\, dx$ (hacer la división) **x)** $\int \frac{x^2 + x + 1}{x+1}\, dx$ (hacer la división)

y) $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\, dx$ (hacer la división) **z)** $\int \frac{x}{x^2 + 9}\, dx$ **α)** $\int \frac{\sqrt{7 + 2\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$

β) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}\, dx$ (tipo arcsen) **γ)** $\int \frac{1}{x\left[\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2\right]}\, dx$ (hacer ln x=t)

(Sol: **a)** $\frac{-1}{x-1}$ **b)** $\ln\sqrt[6]{3x^2 - 6x + 5}$ **c)** $xe^x - 2e^x$ **d)** $\ln x\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x$

e) $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **f)** $\ln\frac{(x-1)^2}{x+2}$ **g)** $\ln(x^2 + 2x + 5)^3 + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$ **h)** $\frac{x^2}{2} + 5x + \ln\sqrt[3]{\frac{(x-4)^{65}}{(x-1)^2}}$

i) $\ln\sqrt{\operatorname{sen} x + 1} - \ln\sqrt[3]{\operatorname{sen} x - 1} - \frac{1}{4(\operatorname{sen} x - 1)} - \frac{1}{4(\operatorname{sen} x + 1)}$ **j)** $\ln\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ **k)** -x-cosecx-ctgx **l)** $\frac{\operatorname{sen}^3 3x}{9}$

m) $-\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x \operatorname{sen} 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27}$ **n)** $\frac{x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x}{2}$ **o)** $\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{3} + \frac{2e^{3x}}{9}$ **p)** $\ln(x^2 + 49) - \frac{6}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{7}$

q) $\frac{x^2}{2}+x+\ln x-\ln\sqrt[3]{(x-2)^2}-\ln\sqrt[3]{x+1}$ **r)** $x^2\ln\sqrt{x+1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\ln\sqrt{x+1}$ **s)** $\frac{\ln^4 x}{4}$ **t)** $\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)$

u) $\frac{x^2\ln\sqrt{x^2+1}}{2}+\ln\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x+1}{e^x}$ **v)** arctgx+ln(x^2+1) **w)** –x–ln(1–x)^2 **x)** $\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)$

y) $\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)^2$ **z)** $\ln\sqrt{x^2+9}$ **α)** $\frac{\sqrt{(7+2\operatorname{tg}x)^3}}{3}$ **γ)** $\ln\sqrt[6]{\frac{(\ln x-2)^2(\ln x+1)}{(\ln x-1)^3}}$

13. Calcular la primitiva de f(x)=ln^{2}x que se anula en x=e

14. Determinar f(x) sabiendo que f ´´´(x)=24x, f(0)=0, f ´(0)=1 y f ´´(0)=2 (Soluc: f(x)=x^4+x^2+x)

15. Hallar un polinomio cuya derivada sea x^2+x–6 y tal que el valor de su máximo sea tres veces mayor que el de su mínimo. *(Soluc: p(x)=x^3/3+x^2/2–6x+71/4)*