LOGARITMOS

John Neper (1550-1617)

Henry Briggs (1561-1630)

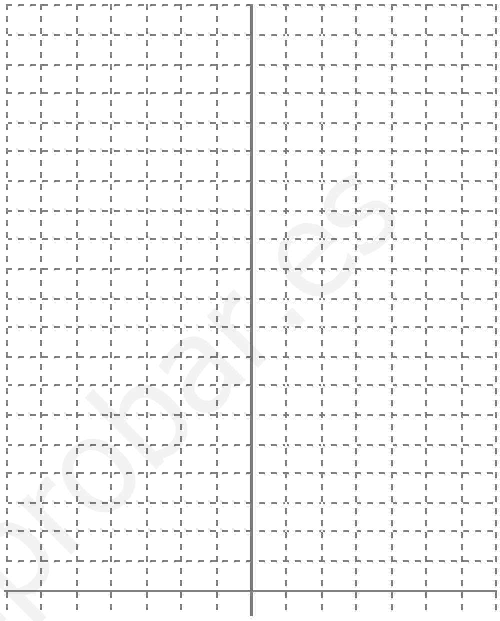
www.quieroaprobar.es

I) FUNCIÓN EXPONENCIAL de BASE a $f(x)=a^x$

«Es aquella función en la que la variable independiente figura en un exponente, es decir, toda función[1] del tipo $f(x)=a^x$, donde $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^+-\{1\}$».

Ejemplo 1: Construir una tabla de valores apropiada y representar $f(x)=2^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de f(x):

2º) Crecimiento:

3º) Dom(f)= Im(f)=

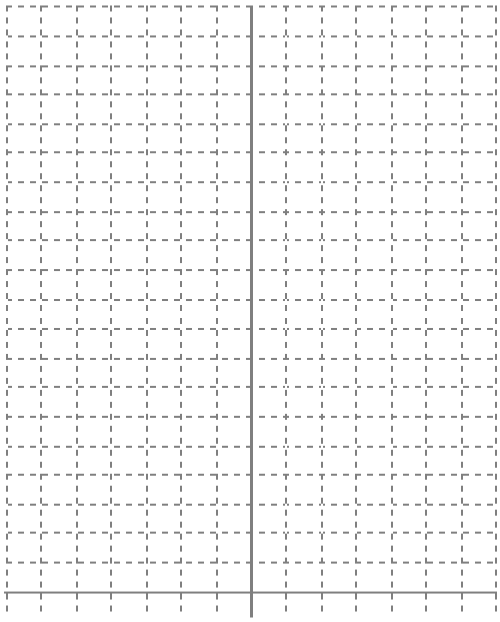
4º) Asíntotas:

5º) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x =$

Ejemplo 2: Ídem con $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=0{,}5^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de f(x):

2º) Crecimiento:

3º) Dom(f)= Im(f)=

4º) Asíntotas:

5º) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$

www.yoquieroaprobar.es

[1] En la siguiente página se explica por qué se impone que $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^+-\{1\}$

Definición:

Función exponencial de base a>0 (a≠1): $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longrightarrow a^x$

NOTA: Se considera a>0 porque, en caso contrario, obtendríamos una función poco "congruente"; por ejemplo, para $f(x)=(-2)^x$:

$$f(2)=(-2)^2=4>0$$

$$\text{Pero} \quad f(3)=(-2)^3=-8<0$$

$$f(1/2)=(-2)^{1/2}=\sqrt{-2}=\nexists$$

etc.

Propiedades de la función exponencial:

1º) La función a^x siempre pasa por (0,1) y (1,a)

2º) $a>1 \Rightarrow a^x$ CRECIENTE

$a<1 \Rightarrow a^x$ DECRECIENTE

3º) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$, es decir, «**La función exponencial a^x siempre está definida**[2]»

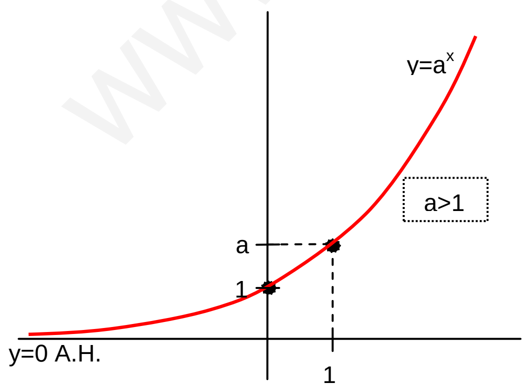
4º) $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^+-\{0\}$, o dicho de otra forma, $a^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, «**La función exponencial siempre es** estrictamente **positiva**»

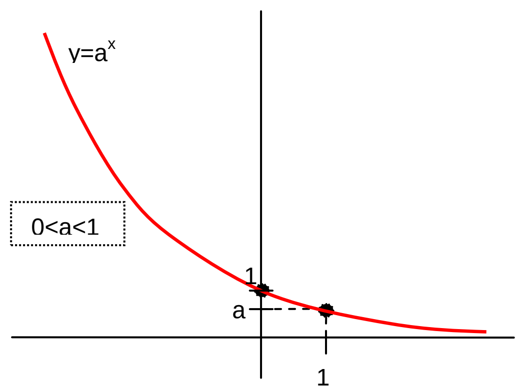
5º) $a>1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0^+ \qquad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$

$0<a<1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=0^+$

6º) y=0 A.H., es decir, «**La función exponencial a^x siempre presenta el eje x como A.H.**[3]»

■ Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:





[2] Nótese que nos referimos a a^x; por ejemplo, $a^{1/x}$ no estará definida en x=0

[3] De nuevo, nos referimos a a^x; por ejemplo, $a^{1/x}$ presenta la A.H. y=1

www.yoquieroaprobar.es

- **Caso particular:** Cuando la base es $e \simeq 2{,}718281828459\ldots$ (cte. de Euler[4]), tenemos la función exponencial de base e, utilizada muy frecuentemente. (Construiremos su gráfica en el ejercicio 1 del final del tema).

II) FUNCIÓN LOGARÍTMICA de BASE a $f(x)=\log_a x$

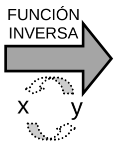
La enorme complejidad de los cálculos que se presentaron durante el siglo XVI en los estudios astronómicos dio lugar a numerosos intentos de simplificación, entre ellos la sustitución de multiplicaciones por sumas. Se debe al escocés John Napier (en latín, Neper) la invención en aquella época de los logaritmos, lo cual trajo consigo la función logarítmica. En cambio, el reciente desarrollo de la electrónica ha originado que en la actualidad prácticamente haya desaparecido la importancia de su utilización como técnica de cálculo, aunque no como concepto matemático.

Definición: «La función logarítmica $y=\log_a x$ (con $a>0$ y $a\neq 1$) es la inversa de la función exponencial $y=a^x$»

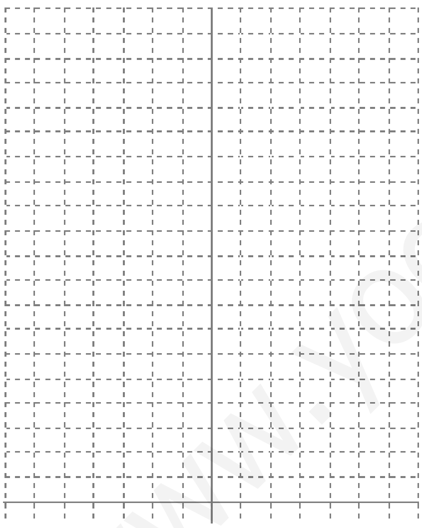
(pág. 34 del libro de texto)

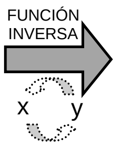
Ejemplo 3: Utilizando la tabla de la función $y=2^x$ (ejemplo 1), obtener la tabla de $y=\log_2 x$ y su gráfica.

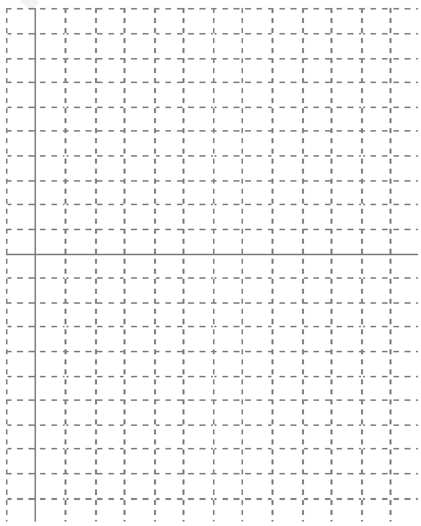
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y=2^x$									



x									
$y=2^x$									







www.yoquieroaprobar.es

---

[4] El número e, llamado constante de Euler –en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783)–, surge como límite de la siguiente sucesión:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Por ejemplo,

$n=1 \Rightarrow a_1=2$	$n=100 \Rightarrow a_{100}=$
$n=2 \Rightarrow a_2=1{,}5^2=2{,}25$	$n=1\,000 \Rightarrow a_{1\,000}=$
$n=3 \Rightarrow a_3=1{,}33^3=2{,}3703$	$n=10\,000 \Rightarrow a_{10\,000}=$
$n=4 \Rightarrow a_4=1{,}25^4=$	$n=100\,000 \Rightarrow a_{100\,000}=$
$n=5 \Rightarrow a_5=$	$n \to \infty \Rightarrow \boxed{e \simeq 2{,}718281828459\ldots}$

Se trata de un número irracional, es decir, consta de ∞ cifras decimales no periódicas.

Nótese en la tabla que: $\log_2 4=2$ $\left(\text{pq } 2^2=4\right)$

$\log_2 8=3$ $\left(\text{pq } 2^3=8\right)$

$\log_2 16=4$ $\left(\text{pq } 2^4=16\right)$

$\vdots$

Y, en general:

Definición: «El logaritmo en base **a** de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número»

argumento o antilogaritmo

$$\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$$

base logaritmo

Ejemplos:

$\log_3 81=$ pq

$\log_{10} 100=$ pq

$\log_2 64=$ pq

$\log_2 1/2=$ pq

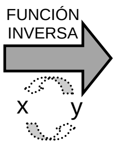
$\log_9 3=$ pq

$\log_3 (-9)=$ pq

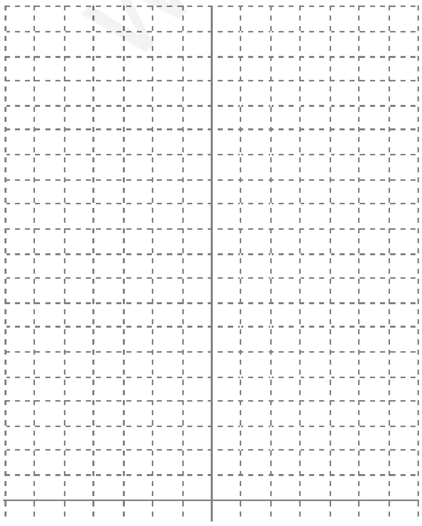
Nótese que en todo esto hay cierta analogía con la conocida definición de $\sqrt[n]{a}=x$ como inversa de x^n

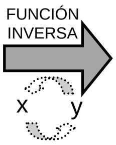
Ejemplo 4: Utilizando la tabla de la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ejemplo 2), obtener la tabla de $y=\log_{1/2} x$ y su gráfica.

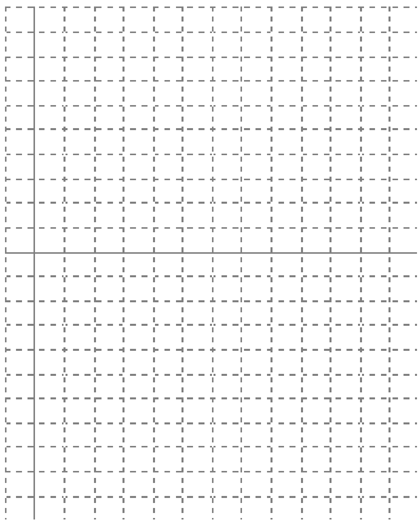
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$									



x									
$y=\log_{1/2}x$									







www.yoquieroaprobar.es

CONCLUSIÓN: Propiedades de la función logarítmica:

1º) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}^{+}-\{0\}$, o dicho de otra forma, «**No existe el logaritmo de un número negativo**[5]»

2º) $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$, por lo que podemos añadir: «**…pero un logaritmo puede ser negativo**»

3º) $\boxed{\log_a a=1}$ y $\boxed{\log_a 1=0}$

4º) $a>1 \quad \Rightarrow \quad \log_a x$ CRECIENTE

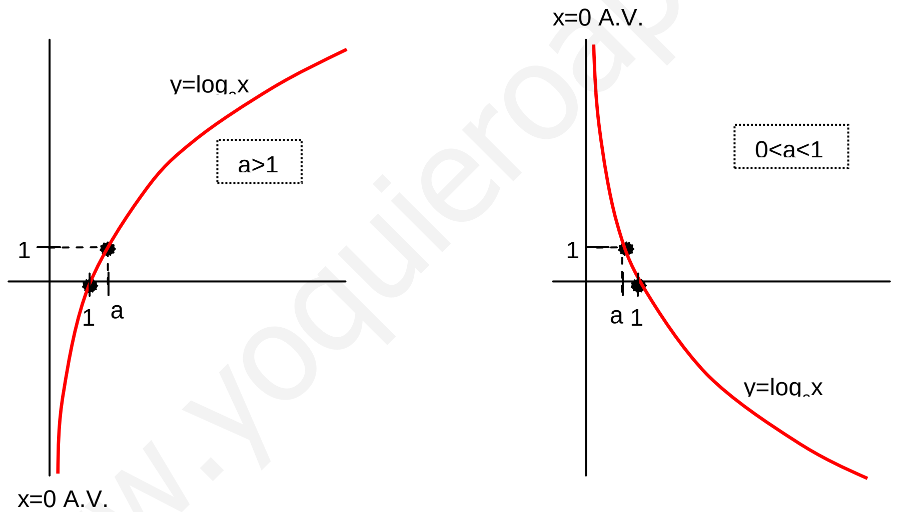
$0<a<1 \quad \Rightarrow \quad \log_a x$ DECRECIENTE

5º) $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to \infty} \log_a x=\infty$

$a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=\infty \qquad \lim\limits_{x\to \infty} \log_a x=-\infty$

6º) x=0 A.V., es decir, «**La función logarítmica $\log_a x$ siempre presenta el eje y como A.V.**[6]»

- Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:



- **Caso particular: LOGARITMOS NEPERIANOS[7]:** Son los que utilizan como base $e\simeq 2{,}718281828459\ldots$; tienen una notación especial:

(pág. 35 del libro de texto) $\log_e x=\ln x$

Ejercicio final tema: 4

---

[5] Nótese que, puesto que la función exponencial y la logarítmica son inversas, el dominio de una coincide con el recorrido de la otra, y viceversa.

[6] Nótese que nos referimos a $\log_a x$; por ejemplo, $\log\dfrac{2-x}{x-1}$ presenta únicamente A.V. en x=1 y x=2

[7] Se llaman así en honor a John Neper (1550-1617), matemático escocés que, como ya se ha dicho, ideó los logaritmos.

www.yoquieroaprobar.es

III) CÁLCULO LOGARÍTMICO *(pág. 34 libro de texto)*

III.1) Logaritmo de un producto:

$$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

Es decir, **«El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos»**

conocemos p y q

Dem:

$$\left.\begin{array}{l}\log_a p = x \Rightarrow a^x = p\\ \log_a q = y \Rightarrow a^y = q\end{array}\right\}\ p\cdot q = a^x\cdot a^y = a^{x+y}\ \Rightarrow \boxed{\log_a(p\cdot q) = x+y = \log_a p+\log_a q}\ \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones:

1) Esta fórmula es válida en cualquier base.

2) Esta fórmula se puede generalizar a 3 o más argumentos:

$$\log(p\cdot q\cdot r)=\log p+\log q+\log r \qquad \text{etc.}$$

3) Esta fórmula –y las siguientes que veremos a continuación– nos puede servir para comprender cómo surgieron los logaritmos en el siglo XVI como instrumento para facilitar los cálculos astronómicos con cantidades elevadísimas para la época (como ya indicamos al comienzo del apartado II). Vamos a explicarlo con un ejemplo:

Supongamos que queremos hallar el valor de $N=1\,638\,457\cdot 1\,968\,334$

(Recordar que, antes de la aparición de las calculadoras, operaciones de este tipo eran muy laboriosas) Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\log 1\,638\,457+\log 1\,968\,334=\log N$$

Se disponía de tablas de logaritmos muy completas, con las que se podía reemplazar cada logaritmo por su valor:

$$6{,}2144\ldots+6{,}2940\ldots=\log N$$

Es decir: $$12{,}5085\ldots=\log N$$

A continuación, se buscaba en las tablas el caso inverso, es decir, cuál es el número cuyo logaritmo es 12,5085… (lo que se conoce como **antilogaritmo**[8]):

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{3\,225\,030\,620\,638}$$

Hoy en día todo esto se nos puede antojar algo laborioso, pero situémonos en aquellos tiempos –no muy remotos[9]–, sin ordenadores ni calculadoras…

III.2) Logaritmo de un cociente:

$$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$$

Es decir, **«El logaritmo de un cociente es la resta de logaritmos»**

Dem:

---

[8] En la calculadora, para hallar un antilogaritmo, normalmente se utiliza la combinación $\boxed{\text{SHIFT}}$-$\boxed{\log}$:

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{\text{SHIFT}}\text{-}\boxed{\log}\ 12{,}5085\ldots=3\,225\,030\,620\,638$$

[9] Por ejemplo, el uso generalizado de las calculadoras se produjo en la década de los 70 del siglo pasado…

www.yoquieroaprobar.es

III.3) Logaritmo de una potencia: $\boxed{\log p^n = n \cdot \log p}$ Es decir, **«El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base»**

Dem: Vamos a probarlo para $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\log p^n} = \log(\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n \text{ términos}}) = \underbrace{\log p + \log p + \ldots + \log p}_{n \text{ términos}} = \boxed{n \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones: **1)** En realidad esta fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{R}$

2) Caso particular: LOGARITMO DE UNA RAÍZ:

$$\boxed{\log \sqrt[n]{p}} = \log p^{1/n} = \boxed{\frac{1}{n} \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Es decir: **«El logaritmo de una raíz es el inverso del índice por el logaritmo del radicando»**

Ejercicios final tema: 5 al 19

IV) ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS *(págs. 78 y 79 libro de texto)*

«Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece como exponente». Existen varios procedimientos para su resolución, dependiendo del tipo de ecuación; básicamente, se pueden resumir en tres:

1er caso: Algunas ecuaciones exponenciales se resuelven consiguiendo una igualdad entre dos potencias de la misma base, con lo cual los exponentes tendrán que ser iguales.

Ejemplo 5: $4^{2x+1} = 8^{2x}$

2º caso: Cuando figuran sumas y/o restas de expresiones exponenciales, lo que suele funcionar es aplicar un cambio de variable del tipo $\mathbf{a^x = t}$, con lo cual la ecuación exponencial se transforma en una ecuación algebraica en **t**.

Ejemplo 6: $9^x + 3^x = 6642$

www.yoquieroaprobar.es

3er caso: En otros casos lo que suele funcionar es tomar logaritmos decimales (o también neperianos, según convenga…) en ambos miembros (¡evidentemente, esto no funciona cuando al menos uno de los miembros es una suma!).

Ejemplo 7: $2^{2x-1} = 3^{x}$

NOTA: El saber cuál de los tres procedimientos aplicar a una ecuación exponencial concreta es una técnica que requiere práctica y sentido común; en algunos casos sólo funciona uno de los tres métodos, mientras que en otros es posible que se pueda elegir entre dos de ellos, o cualquiera de los tres… Para adquirir dicha técnica, resultará útil el siguiente ejercicio:

- «Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo». Se resuelven siempre aplicando las propiedades de los logaritmos en orden inverso hasta lograr una igualdad de logaritmos de la misma base, con lo cual sus argumentos serán iguales (esto se conoce como ***propiedad inyectiva***):

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \;\Rightarrow\; x = y}$$

¡IMPORTANTE!: En este caso **es fundamental comprobar las posibles soluciones obtenidas** sustituyéndolas en la ecuación del principio, y descartar aquellas que conduzcan a un logaritmo con argumento negativo.

Ejemplo 8: $\log x = 2 \log 4$

Ejemplo 9: $4 \log x - 1 = \log 4 + \log (2x)$ *(Soluc : $x = 2\sqrt[3]{10}$)*

www.yoquieroaprobar.es

V) CAMBIO DE BASE

Fórmula del cambio de base de sistema de logaritmos: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

Dem: Puesto que el logaritmo y la exponencial son funciones inversas, es evidente que:

$$x = a^{\log_a x}$$

Tomando $\log_b$ en ambos miembros, y aplicando la fórmula del logaritmo de una potencia, obtenemos la fórmula anterior (desordenada):

$$\boxed{\log_b x} = \log_b a^{\log_a x} = \boxed{\log_a x \cdot \log_b a} \qquad \text{(C.Q.D)}$$

Utilidad: La fórmula del cambio de base permite calcular logaritmos en cualquier base con las calculadoras habituales, que sólo disponen de logaritmos decimales; en efecto, para ello basta con tomar b=10 en la fórmula, con lo cual se obtiene:

$$\log x = \log_a x \cdot \log a$$

Despejando:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}}$$

Ejemplo: $\log_3 9 = \dfrac{\log 9}{\log 3} = \dfrac{0{,}9542...}{0{,}4771...} = 2$ (Como puede comprobarse, aplicando la definición…)

www.yoquieroaprobar.es

26 EJERCICIOS de LOGARITMOS

Función exponencial y logarítmica:

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, se pide: **i)** Tabla de valores y representación gráfica. **ii)** Signo de f(x). **iii)** Cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. **v)** Dominio y recorrido. **vi)** Asíntotas. **vii)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

a) $f(x)=10^x$ y $f(x)=\log x$ **b)** $f(x)=0{,}1^x$ y $f(x)=\log_{0,1} x$ **c)** $f(x)=e^x$ y $f(x)=\ln x$

d) $f(x)=3^x$ y $f(x)=\log_3 x$

■ **Definición de logaritmo:** $\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ (donde a>0, a≠1)

■ **Sistemas de logaritmos más utilizados:**

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano[1]	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde e ≅ 2,718281828459… se llama cte. de Euler; es un número irracional.

Definición de logaritmo:

2. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$
b) $\log_3 81$
c) $\log_3 1/9$
d) $\log_3(-9)$
e) $\log_2 \sqrt{2}$
f) $\log_2 \sqrt{8}$
g) $\log_{10} 1000$
h) $\log_4 2$
i) $\log_4 64$
j) $\log_{10} 0{,}01$
k) $\log_4 1/16$
l) $\log_5 0{,}2$
m) $\log_4 256$
n) $\log_4 1/64$
o) $\log_2 0{,}125$
p) $\log_4 1$
q) $\log_2 1024$
r) $\log_2 1/64$
s) $\log_3 \sqrt{27}$
t) $\log_2 \log_2 4$

(*Soluc:* ***a)*** *2;* ***b)*** *4;* ***c)*** *-2;* ***d)*** $\nexists$*;* ***e)*** *1/2;* ***f)*** *3/2;* ***g)*** *3;* ***h)*** *1/2;* ***i)*** *3;* ***j)*** *-2;* ***k)*** *-2;* ***l)*** *-1;* ***m)*** *4;* ***n)*** *-3;* ***o)*** *-3;* ***p)*** *0;* ***q)*** *10;* ***r)*** *-6;* ***s)*** *3/2;* ***t)*** *1*)

3. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

a) 10.000 **b)** 1.000.000 **c)** 0,001 **d)** 1/1.000.000 **e)** 10^8 **f)** 10^{-7}
g) 10 **h)** 1

(*Soluc:* ***a)*** *4;* ***b)*** *6;* ***c)*** *-3;* ***d)*** *-6;* ***e)*** *8;* ***f)*** *-7;* ***g)*** *1;* ***h)*** *0*)

[1] En honor a John Napier (Neper, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

www.yoquieroaprobar.es

4. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8=x$	**e)** $\ln x=2$	**i)** $\ln e^3=x$	**m)** $\log_x 0.01=2$	**q)** $\log_{0.25} x=2$
b) $\log_2 1/8=x$	**f)** $\log_3 x=-2$	**j)** $\log_x 64=1$	**n)** $\ln x=-1/2$	**r)** $\log_2(-16)=x$
c) $\log 100=x$	**g)** $\log_x 49=2$	**k)** $\log_x 25=-1$	**o)** $\log_{1/36} x=2$	**s)** $\log_x 125=-3$
d) $\log_3 x=3$	**h)** $\log_x 8=3$	**l)** $\log_{1/100} 100=x$	**p)** $\log_x 2=0$	**t)** $\log_3 \log_3 3)=x$

*(Soluc: **a)** 3; **b)** −3; **c)** 2; **d)** 27; **e)** e^2; **f)** 1/9; **g)** 7; **h)** 2; **i)** 3; **j)** 64; **k)** 1/25; **l)** −1; **m)** 0,1; **n)** $\sqrt{e}/e$; **o)** 1/1296; **p)** ∄; **q)** 0,0625; **r)** ∄; **s)** 1/5; **t)** 0)*

Cálculo logarítmico:

■ **Fórmulas del cálculo logarítmico:**

$$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

$$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$$

$$\boxed{\log p^n=n\cdot\log p} \quad \boxed{\log\sqrt[n]{p}=\frac{1}{n}\log p}$$

(todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares: $\boxed{\log_a a^x=x}$ $\boxed{a^{\log_a x}=x}$ $\boxed{\ln e^x=x}$ $\boxed{e^{\ln x}=x}$

$\boxed{\log_a a=1}$ $\boxed{\log_a 1=0}$ $\boxed{\ln e=1}$ $\boxed{\ln 1=0}$

5. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular:

a) $\log_6\frac{1}{36}$

b) $\log_3\sqrt[4]{27}$

c) $\log_3\frac{\sqrt{243}}{3}$

d) $\log_a\frac{1}{\sqrt{a}}$

e) $\ln e^2$

f) $\log_4\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$

g) $\log_3\sqrt[3]{9}$

h) $\ln\frac{1}{e}$

i) $\log_4 2$

j) $\log_8 2$

k) $\log_8\sqrt{32}$

l) $\ln\sqrt[3]{e}$

m) $\log_2 64$

n) $\log_4\frac{1}{64}$

o) $\log_3\frac{3}{\sqrt[5]{81}}$

p) $\log_3\frac{\sqrt{3}}{9}$

q) $\ln\frac{\sqrt{e}}{e}$

r) $\log_4(-4)$

s) $\log_2\sqrt[3]{32}$

t) $\log_3\sqrt{27}$

u) $\log_2\frac{\sqrt[5]{64}}{8}$

v) $\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

w) $\log_3\frac{1}{\sqrt{243}}$

x) $\log\sqrt{20}+\log\sqrt{5}$

y) $\log\frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

z) $\log_3\frac{1}{27\sqrt[3]{9}}$

α) $\ln\frac{e}{\sqrt[4]{e}}$

β) $\log\frac{\sqrt{10}}{0{,}1}$

γ) $\ln\frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$

δ) $\log_3\frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$

ε) $\log_{1/5} 125$

*(Soluc: **a)** −2; **b)** 3/4; **c)** 3/2; **d)** −1/2; **e)** 2; **f)** −3/5; **g)** 2/3; **h)** −1; **i)** 1/2; **j)** 1/3; **k)** 5/6; **l)** 1/3; **m)** 6; **n)** −3; **o)** 1/5; **p)** −3/2; **q)** −1/2; **r)** ∄; **s)** 5/3; **t)** 3/2; **u)** −9/5; **v)** −2/3; **w)** −5/2; **x)** 1; **y)** −1/3; **z)** −11/3; **α)** 3/4; **β)** 3/2; **γ)** 1/3; **δ)** −7/4; **ε)** −3)*

www.yoquieroaprobar.es

6. Expresar en función de log 2 los logaritmos decimales de los siguientes números, y comprobar con la calculadora:

a) 16
b) 5
c) 32/5
d) 0,25
e) 0,625
f) 250
g) 1/40
h) $\sqrt[3]{16}$
i) 16/5
j) 0,32
k) 0,08
l) $\sqrt[5]{80}$
m) $\sqrt[3]{0,08}$

*(Soluc: **a)** 4log 2; **b)** 1-log 2; **c)** -1+6log 2; **d)** -2log 2; **e)** 1-4log 2; **f)** 3-2log 2; **g)** -1-2log 2; **h)** $\frac{4}{3}\log 2$; **i)** -1+5log 2; **j)** -2+5log 2; **k)** -2+3log 2; **l)** $\frac{1}{5}(1+3\log 2)$; **m)** $-\frac{2}{3}+\log 2$)*

7. Expresar en función de ln 2:

a) $\ln 8$ **b)** $\ln\frac{e}{2}$ **c)** $\ln\frac{e^3}{4}$ **d)** $\ln\frac{4}{\sqrt{e}}$ **e)** $\ln\sqrt{2e}$

*(Soluc: **a)** 3 ln 2; **b)** 1−ln 2; **c)** 3−2 ln 2; **d)** $-\frac{1}{2}+2\ln 2$; **e)** $\frac{1+\ln 2}{2}$)*

8. Expresar en función de log 2 y log 3 los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 25
b) log 24
c) log 4/3
d) log 9/4
e) log $\sqrt[3]{6}$
f) log 30
g) log 162
h) log 3,6
i) log 1,2
j) log 90
k) log 0,27
l) log 0,72
m) log $\sqrt{3,6}$

*(Sol: **a)** 2−2 log 2; **b)** 3 log 2+log 3; **c)** 2 log 2−log 3; **d)** 2 log 3−2log 2; **e)** $\frac{\log 2+\log 3}{3}$; **f)** 1+log 3; **g)** log 2+4 log 3; **h)** −1+2 log 2+2 log 3; **i)** −1+2 log 2+ log 3; **j)** 1+2 log 3; **k)** −2+3 log 3; **l)** −2+3 log 2+2 log 3; **m)** −1/2+ log 2+ log 3)*

9. Expresar en función de log 2, log 3 y log 7 los logaritmos siguientes:

a) log 84 **b)** log 0,128 **c)** log 0,125 **d)** log 14,4 **e)** log $\sqrt[3]{12}$

10. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6+\log 2}{\log 9+\log 8-\log 6}=1$ **b)** log 125=3(1−log 2) **c)** $\frac{\log 6+\log 3-\log 2}{\log 9-\log 3}=2$ **d)** $10^{-2\log 2}=\frac{1}{4}$

e) $\frac{1+\log 8}{\log 5+2\log 4}=1$

11. Sabiendo que log 7,354=0,866524..., hallar (sin calculadora):

a) log 735,4 **b)** log 0,007354 **c)** log 7354

12. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

a) $\log(2x)^3$
b) $\log(2x^3)$
c) $\log\left(\frac{2x}{y}\right)^2$
d) $\ln(ax^2)$
e) $\ln(ax)^2$
f) $\log\sqrt[3]{c}$
g) $\log\frac{mnp}{qr}$
h) $\log a^{3/4}$
i) $\log\left(\frac{mn}{p}\right)^r$
j) $\ln\frac{1}{ex}$
k) $\log\sqrt{mn}$

www.yoquieroaprobar.es

l) $\ln\sqrt{x^3}$

m) $\log\left(x^2-y^2\right)$

n) $\log\sqrt{\dfrac{m^n}{pq^r}}$

o) $\log\sqrt{m^2-n^2}$

p) $\log\dfrac{m^2-x^2}{\sqrt{m^2+x^2}}$

q) $\log\left(10\sqrt[3]{x}\right)$

r) $\log\sqrt{\dfrac{a^2b^3c^5}{mp}}$

s) $\log\left(x^n y^m\right)$

t) $\log\dfrac{2m^2n^3}{pq^4}$

u) $\ln\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

*(Sol: **a)** 3 log 2+3 log x; **b)** log 2+3 log x; **c)** 2 log 2+2 log x−2 log y; **d)** ln a+2 ln x; **e)** 2 ln a+2 ln x; **f)*** $\frac{1}{3}\log c$; ***g)** log m+log n+log p−log q−log r; **h)*** $\frac{3}{4}\log a$; ***i)** r log m+r log n−r log p; **j)** −1−ln x; **k)*** $\frac{\log m+\log n}{2}$; ***l)*** $\frac{3}{2}\ln x$; ***m)** log(x+y)+log(x−y); **n)*** $\frac{n\log m-\log p-r\log q}{2}$; ***o)*** $\frac{\log(m+n)+\log(m-n)}{2}$; ***p)*** $\log(m+x)+\log(m-x)-\frac{1}{2}\log\left(m^2+x^2\right)$ ***q)*** $\frac{1+\log x}{3}$; ***r)*** $\frac{2\log a+3\log b+5\log c-\log m-\log p}{2}$; ***s)** n log x+m log y; **t)** log 2+2 log m+3 log n−log p−4 log q* ***u)*** $-\frac{1}{2}\ln x$*)*

13. Obtener **x** en las siguientes expresiones:

a) $\log x = 1 + 2\log a$ *(Soluc: $x = 10a^2$)*

b) $\log x = 2\left(\log a + 3\log b\right) - \dfrac{1}{2}\left(2\log c + \log d\right)$ *(Soluc: $x = \dfrac{a^2b^6}{c\sqrt{d}}$)*

c) $\ln x = \dfrac{\ln a + 2\ln b}{2} - 3\left(2\ln a - \ln b\right)$

.

14. Sabiendo que x=7 e y=3, utilizar la calculadora para hallar:

a) $\log x^2$ **b)** $\log(2x)$ **c)** $\log^2 x$ **d)** $\log(x+y)$ **e)** $\log x + y$ **f)** $\log\dfrac{x+y}{2}$ **g)** $\dfrac{\log(x+y)}{2}$

15. **a)** Hallar **a** sabiendo que $\log_7\dfrac{a}{b} + \log_7 b = 2$ *(Soluc: a=49)*

b) Si $\log_4 N=3$, ¿cuánto vale $\log_4\dfrac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$? ¿Cuánto vale N? *(Soluc: −8; N=64)*

16. ¿En qué base se cumple que $\log_a 12+\log_a 3=2$? *(Soluc: a=6)*

17. ¿V o F? Razona la respuesta:

a) log (A+B)=log A + log B

b) $\log\left(A^2+B^2\right)=2\log A+2\log B$

c) $\dfrac{\ln 2x}{2} = \ln x$

d) $\ln\dfrac{2x}{2} = \ln x$

e) $\log\dfrac{AB}{C} = \dfrac{\log(AB)}{\log C}$

www.yoquieroaprobar.es

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos; en caso contrario, son positivos.

☞ *Se recomienda realizar también el* ***ejercicio 64 pág. 49*** *del libro.*

18. CURIOSIDAD MATEMÁTICA: Comprobar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico británico Paul Dirac (1902-1984), que permite escribir cualquier número N empleando solamente tres doses:

$$N=-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\overset{\text{(N raíces)}}{\cdots}\sqrt{\sqrt{2}}}}$$

19. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y −2? *(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)*

Ecuaciones exponenciales:

20. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

a) $3^x=48$ *(Soluc: x≅3,5237)*

b) $2^x=\frac{8}{27}$ *(Soluc: x≅−1,7549)*

c) $2^{x+1}+4=80$ *(Soluc: x≅5,2479)*

d) $2\cdot3^x-3^{2x}+3=0$ *(Soluc: x=1)*

e) $3^{x-1}+3^{x+1}-3^x=63$ *(Soluc: x=3)*

f) $2^{2x-3}=8^{x+1}$ *(Soluc: x=-6)*

g) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$ *(Soluc: x=2)*

h) $2^{x-3}=-3$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

i) $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$ *(Soluc: x=2)*

j) $2\,e^{x-4}=3$ *(Soluc: x≅4,4055)*

k) $100\cdot10^x=\sqrt[x]{1000^5}$ *(Soluc: x=3)*

l) $3^{x/2}=768$ *(Soluc: x≅12,0949)*

m) $4^{x^2+2}=2^{-2}$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

n) $3^{2x+5}=3^7$ *(Soluc: x=1)*

o) $\frac{1}{e^x}=27$ *(Soluc: x≅-3,2958)*

p) $5^{x^2-5x+6}=1$ *(Soluc: x_1=2, x_2=3)*

q) $3^x\cdot\left(3^2\right)^x=9^3$ *(Soluc: x=2)*

r) $e^{2x}-2e^{x+1}+e^2=0$ *(Soluc: x=1)*

s) $2^x-10\cdot2^x+16=0$ *(Soluc: x≅0,83)*

t) $2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}+2^{x+5}+2^{x+6}=31$ *(Soluc: x=−2)*

u) $e^{4x}-5e^{3x}+5e^{2x}+5e^x-6=0$ *(Sol: x_1=2, x_2=ln2; x_3=ln3)*

v) $2^{x+1}=4^{2x-4}$ *(Soluc: x=3)*

w) $3^{2x}\cdot2^{3x-1}=6^{x+1}$ *(Soluc: x=1)*

x) $e^{4x-x^2}=e^3$ *(Sol: x_1=1, x_2=3)*

y) $2^{x-3}=3^{x+1}$ *(Soluc: x≅−7,8380)*

z) $2^{2x}-3\cdot2^{x+1}+8=0$ *(Soluc: x_1=1, x_2=2)*

α) $3^{2x-4}=729$ *(Soluc: x=5)*

β) $e^{x-9}=\sqrt{73}$ *(Soluc: x≅11,1452)*

γ) $2^{x+9}=3^x$ *(Soluc: x≅15,38)*

δ) $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$ *(Soluc: x=±2)*

ε) $10^{3-x}=1$ *(Soluc: x=3)*

ζ) $3^x+3^{1-x}=4$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

η) $e^{x+2}+e^{x-1}=e^{2x}+e$ *(Soluc: x_1=−1, x_2=2)*

θ) $2^{x/2}=768$

ι) $\sqrt[x]{a}=a^x$ *(Soluc: x=1)*

κ) $e^{2x}-2e^x+2=0$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

λ) $4^x-14\cdot2^{x-1}+12=0$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 3/log 2)*

μ) $2^{x-1}\cdot3^{1-x}=5^{2x-2}$ *(Soluc: x=1)*

ν) $2^{2x}=4^{x^2}$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

ξ) $2^{x+1}\cdot3^{x-1}=4^x$ *(Soluc: x=1)*

ο) $2^{x+1}=3^{x-1}\cdot4^x$ *(Soluc: x=1)*

π) $9^x+2\cdot3^{x+1}=27$ *(Soluc: x=1)*

ρ) $4^x-2\cdot2^{x-1}=6$ *(Soluc: x≅1,5850)*

σ) $11\cdot3^x-9^x=18$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 2/log 3)*

www.yoquieroaprobar.es

τ) $3^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ *(Soluc: x=−2)*

υ) $2^{2x-1}-16=2^{x+1}$ *(Soluc: x=3)*

21. Considérese la siguiente fórmula:

$$U=P(\rho+V)^{-1/D}$$

Despejar ρ (Ayuda: no es necesario utilizar logaritmos) *(Soluc: $\rho=-V+P^{D}\cdot U^{-D}$)*

22. Sin necesidad de operar, razonar que ecuaciones del tipo:

$$2^x+3^x=0$$
$$4^{x-2}+2^{x^2+1}+2=0$$
$$x^2+5^x=0,\quad \text{etc.}$$

no pueden tener solución.

Ecuaciones logarítmicas:

23. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

a) 2 log x−log (x+6)=3 log 2 *(Soluc: x=12)*
b) 4 $\log_2(x^2+1)=\log_2 625$ *(Soluc: x=±2)*
c) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ *(Soluc: x=±5)*
d) ln (x−3)+ln (x+1)=ln 3+ln (x−1) *(Soluc: x=5)*
e) $2\log^2 x+7\log x-9=0$ *(Soluc: $x_1=10;\ x_2=\sqrt{10}/10^5$)*
f) 2 ln (x−3)=ln x−ln 4 *(Soluc: x=4)*
g) log (x+3)−log (x−6)=1 *(Soluc: x=7)*
h) log (x+9)=2+log x *(Soluc: x=1/11)*
i) log (x+1)+log (x−1)=1/100 *(Soluc: ∄ soluc.)*
j) $\log\sqrt{3x+5}+\log\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=5)*
k) $\log(x^2-7x+110)=2$ *(Soluc: $x_1=2;\ x_2=5$)*
l) 2 ln x+3 ln (x+1)=3 ln 2 *(Soluc: x=1)*
m) $\log(x^2+3x+36)=1+\log(x+3)$ *(Soluc: $x_1=1;\ x_2=6$)*
n) ln x+ln 2x +ln 4x=3 *(Soluc: x=e/2)*
o) 4 log x−2 log (x−1)=2 log 4 *(Soluc: x=2)*
p) ln (x−1)+ln (x+6)=ln (3x+2) *(Soluc: x=2)*
q) 2 log x+log (x−1)=2 *(Soluc: x=5)*
r) 2 log (x+9)−log x=2 *(Soluc: x≅1,81)*
s) log (2x+6)−1=2 log(x−1) *(Soluc: $x_1=2;\ x_2=1/5$)*
t) log (x+11)−2 log x=1 *(Soluc: x=11/10)*

www.yoquieroaprobar.es

u) $\log(6x-1)-\log(x+4)=\log x$ *(Soluc: x=1)*

v) $\log x^2+\log x^3=5$ *(Soluc: x=10)*

Sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

Cambio de base:

$$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$$

(fórmula del cambio de base)

24. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

a) Demostrar que $\log_a b \cdot \log_b a=1$

b) Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.

c) Expresar $\log_2 x$ en función de $\log x$ *(Soluc: $\log_2 x=3,3219\log x$)*

25. a) Nuestra calculadora sólo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar $\log_4 5$

b) Razonar que $\log_4 5$ es irracional.

26. Volver a hacer el ejercicio 2, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.

www.yoquieroaprobar.es