Ecuaciones exponenciales

Resuelve las siguientes exponenciales

Ejercicio 1 $3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}}$

$$3^{\frac{x}{6}} = 9^{\frac{6}{7}} \rightarrow 3^{\frac{x}{6}} = \left(3^2\right)^{\frac{6}{7}} = 3^{\frac{12}{7}} \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{12}{7}$$

$$x = \frac{22}{7}$$

Ejercicio 2 $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$

Como $\sqrt{A^k} = A^{\frac{k}{2}}$ entonces ; $\boxed{\sqrt{4^{2x-2}}} = 4^{\frac{2x-2}{2}} = 4^{x-1} = \left(2^2\right)^{x-1} = \boxed{2^{2x-2}}$
Por lo tanto la ecuación $\sqrt{4^{2x-2}} = 16$ queda así:
$\boxed{2^{2x-2}} = 16 = \boxed{2^4} \rightarrow 2x - 2 = 4$

$$x = 3$$

Ejercicio 3 $3^{x^2-5x} = \frac{1}{729}$

$$\boxed{3^{x^2-5x}} = \frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = \boxed{3^{-6}} \rightarrow x^2 - 5x = -6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ejercicio 4 $3^{9x^4-10x^2+1} = 1$

$\boxed{3^{9x^4-10x^2+1}} = 1 = \boxed{3^0} \rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
Resolviendo la ecuación bicuadrada tendremos:

$$x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{18} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{18} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{9} \end{cases}$$

Con lo que:

$$\left| \begin{array}{c} x^2 = 1 \\ x = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right. \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} x^2 = \frac{1}{9} \\ x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right. \end{array} \right|$$

Ejercicio 5 $\dfrac{110}{11^x} + 1 = 11^x$

Multiplicando la ecuación por 11^x tendremos:

$$110 + 11^x = (11^x)^2$$

Transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(11^x)^2 - 11^x - 110 = 0$$

Resolviéndola

$$11^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 11 \\ -10 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{c} 11^x = 11 = 11^1 \\ x = 1 \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} 11^x = -10 \\ \text{Imposible; ya que } 11^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 6 $2{\cdot}2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64$

$2{\cdot}2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 64 \rightarrow 2{\cdot}2^x + 2^x{\cdot}2 + 2^x{\cdot}2^2 = 64$
Sacando factor común 2^x a la izquierda de la ecuación:
$2^x(2+2+4) = 64 \rightarrow 2^x{\cdot}8 = 64 \rightarrow \boxed{2^x} = \frac{64}{8} = 8 = \boxed{2^3}$

$$x = 3$$

Ejercicio 7 $2^x = \frac{1}{2^{x-1}} - 1$

Como $\frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{\frac{2^x}{2}} = \frac{2}{2^x}$
La ecuación inicial queda así:

$$2^x = \frac{2}{2^x} - 1$$

Si multiplicamos la ecuación por 2^x

$$(2^x)^2 = 2 - 2^x$$

transponiendo términos, obtenemos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$$

Resolviéndola :

$$2^x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 1 = 2^0 \\ x = 0 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -4 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 8 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0$

$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} - 31 = 0 \rightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31$
$5^x + 5^x{\cdot}5 + 5^x{\cdot}5^2 = 31$
Sacando factor común 5^x
$5^x(1 + 5 + 25) = 31 \rightarrow 5^x{\cdot}31 = 31 \rightarrow \boxed{5^x} = \frac{31}{31} = 1 = \boxed{5^0}$

$$x = 0$$

Ejercicio 9 $2^x - 3{\cdot}2^{2x-1} + 5{\cdot}2^{x-2} + 78 = 0$

$2^x - 3{\cdot}2^{2x-1} + 5{\cdot}2^{x-2} + 78 = 0 \rightarrow 2^x - 3{\cdot}\dfrac{2^{2x}}{2} + 5{\cdot}\dfrac{2^x}{2^2} + 78 = 0$
Si multiplicamos por 4
$4{\cdot}2^x - 6{\cdot}2^{2x} + 5{\cdot}2^x + 312 = 0 \rightarrow -6{\cdot}2^{2x} + 9{\cdot}2^x + 312 = 0$
Como $2^{2x} = \left(2^x\right)^2$; entonces:
$-6{\cdot}2^{2x} + 9{\cdot}2^x + 312 = 0 \rightarrow -6{\cdot}\left(2^x\right)^2 + 9{\cdot}2^x + 312 = 0$
Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x. Resolviéndola:

$$2^x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 7488}}{-12} = \frac{-9 \pm \sqrt{7569}}{-12} = \frac{-9 \pm 87}{-12} = \left\{\begin{array}{c} -\frac{78}{12} \\ 8 \end{array}\right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -\frac{78}{12} \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 10 $4^x - 3{\cdot}2^x - 40 = 0$

Como $4^x = \left(2^2\right)^x = \left(2^x\right)^2$ entonces:
$4^x - 3{\cdot}2^x - 40 = 0 \rightarrow \left(2^x\right)^2 - 3{\cdot}2^x - 40 = 0$
Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 2^x. Resolviéndola:

$$2^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} = \left\{\begin{array}{c} 8 \\ -5 \end{array}\right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^x = -5 \\ \text{Imposible; ya que } 2^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 11 $2^{3x-1} + 2^{6x-4} - 8 = 0$

$2^{3x-1}+2^{6x-4}-8=0 \rightarrow \frac{2^{3x}}{2}+\frac{2^{6x}}{2^4}-8=0$
Multiplicando la ecuación por 16

$$8{\cdot}2^{3x}+2^{6x}-128=0$$

Como $2^{6x}=\left(2^{3x}\right)^2$ entonces; obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado (incógnita 2^{3x}):

$$\left(2^{3x}\right)^2+8{\cdot}2^{3x}-128=0$$

Resolviéndola

$$2^{3x}=\frac{-8\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{-8\pm 24}{2}=\begin{cases} 8 \\ -16 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 2^{3x}=8=2^3 \\ x=1 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2^{3x}=-16 \\ \text{Imposible; ya que } 2^{3x}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 13 $27^x+9^{3x}-12=0$

$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} 27^x=\left(3^3\right)^x=3^{3x} \\ y \\ 9^{3x}=\left(3^2\right)^{3x}=\left(3^{3x}\right)^2 \end{array}\right] \text{entonces:}$$

$27^x+9^{3x}-12=0 \rightarrow 3^{3x}+\left(3^{3x}\right)^2-12=0 \rightarrow \left(3^{3x}\right)^2+3^{3x}-12=0$

Tenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita a determinar es 3^{3x}. Resolviéndola:

$$3^{3x}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left|\begin{array}{c} 3^{3x}=3=3^1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 3^{3x}=-4 \\ \text{Imposible; ya que } 3^{3x}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \end{array}\right|$$

Ejercicio 14 $2{\cdot}4^x-5{\cdot}2^{4x}+4^{2x}+12=0$

$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} 4^x=\left(2^2\right)^x=\left(2^{2x}\right) \\ y \\ 2^{4x}=\left(2^{2x}\right)^2 \\ 4^{2x}=\left(2^2\right)^{2x}=\left(2^{2x}\right)^2 \end{array}\right] \text{entonces:}$$

$2{\cdot}4^x-5{\cdot}2^{4x}+4^{2x}+12=0 \rightarrow 2{\cdot}\left(2^{2x}\right)-5{\cdot}\left(2^{2x}\right)^2+\left(2^{2x}\right)^2+12=0$
reduciendo términos y ordenándolos:

$$-4{\cdot}\left(2^{2x}\right)^2+2{\cdot}\left(2^{2x}\right)+12=0$$

Si dividimos por -2

$$2\cdot\left(2^{2x}\right)^2 - 1\cdot\left(2^{2x}\right) - 6 = 0$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en 2^x. Resolviéndola:

$$\left(2^{2x}\right) = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$$\left| \begin{array}{c} 2^{2x} = 2 = 2^1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{c} 2^{2x} = -\frac{3}{2} \\ \text{Imposible; ya que } 2^{2x} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

Ejercicio 15 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \dfrac{5^{x+3}}{2} - \dfrac{315}{2}$

$$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = \frac{5^{x+3}}{2} - \frac{315}{2} \rightarrow 5^x + 5^x\cdot 5 + 5^x\cdot 5^2 = \frac{5^x\cdot 5^3}{2} - \frac{315}{2}$$

Transponemos el término $\dfrac{5^x\cdot 5^3}{2}$ a la izquierda de la ecuación

$5^x + 5^x\cdot 5 + 5^x\cdot 5^2 - \dfrac{5^x\cdot 5^3}{2} = -\dfrac{315}{2}$ y sacamos factor común 5^x.

$$5^x\left(1 + 5 + 5^2 - \frac{5^3}{2}\right) = -\frac{315}{2}$$

Operando

$$5^x\left(31 - \frac{125}{2}\right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x\left(-\frac{63}{2}\right) = -\frac{315}{2} \rightarrow 5^x = \frac{315}{63} = 5$$

$$x = 1$$

Ejercicio 16 $3^{2-x} + 2\cdot 3^{3-x} = 7$

$$3^{2-x} + 2\cdot 3^{3-x} = 7 \rightarrow \frac{3^2}{3^x} + 2\cdot\frac{3^3}{3^x} = 7 \rightarrow \frac{9}{3^x} + \frac{54}{3^x} = 7$$

$$\frac{63}{3^x} = 7 \rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \rightarrow x = 2$$

Ejercicio 17 $2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} = 23$

$$\text{Como } \left[\begin{array}{c} 2^{x+2} = 2^x\cdot 2^2 = 4\cdot\left(2^x\right) \\ y \\ 4^{x+1} = \left(2^2\right)^{x+1} = 2^{2x+2} = 2^{2x}\cdot 2^2 = 4\cdot\left(2^x\right)^2 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(2^{-1}\right)^{x-1} = 2^{-x+1} = \dfrac{2}{2^x} \end{array} \right] \text{ entonces:}$$

$$2^{x+2} + 4^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 23 \rightarrow 4\cdot(2^x) + 4\cdot(2^x)^2 - \frac{2}{2^x} = 23$$

Si multiplicamos por 2^x

$4{\cdot}(2^x)^2 + 4{\cdot}(2^x)^3 - 2 = 23{\cdot}2^x$. Transponiendo términos y ordenando obtenemos la siguiente ecuación de tercer grado (en 2^x)

$4{\cdot}(2^x)^3 + 4{\cdot}(2^x)^2 - 23{\cdot}2^x - 2 = 0$

	4	4	-23	-2
2		8	24	2
	4	12	1	$\boxed{0}$

$(2^x - 2)\left[4{\cdot}\left(2^x\right)^2 + 12{\cdot}2^x + 1\right] = 0$

Como un producto de dos factores es cero cuando al menos alguno de ellos es cero.

$$(2^x-2)\left[4{\cdot}\left(2^x\right)^2 + 12{\cdot}2^x + 1\right] = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x - 2 = 0 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 4\left(2^x\right)^2 + 12\left(2^x\right) + 1 = 0 \rightarrow 2^x = \left\{\begin{array}{l} -6+4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6-4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Las ecuaciones exponenciales elementales $2^x = \left\{\begin{array}{l} -6+4\sqrt{2} \approx -0.34 \\ -6-4\sqrt{2} \approx -11.66 \end{array}\right.$ no tienen solución ;ya que $2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 19 $a^{x+2}{\cdot}a^{x-1} = a^{x^2+1}$ siendo $a > 0$

$a^{x+2}{\cdot}a^{x-1} = a^{x^2+1} \rightarrow a^{2x+1} = a^{x^2+1} \rightarrow 2x+1 = x^2+1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ejercicio 20 $\dfrac{\sqrt[x]{a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}}$ siendo $a > 0$

$$\frac{\sqrt[x]{a^2}}{\sqrt[3x]{a^4}} = \sqrt[3]{a^{x^2-3}} \rightarrow \frac{a^{\frac{2}{x}}}{a^{\frac{4}{3x}}} = a^{\frac{x^2-3}{3}} \rightarrow a^{\frac{2}{x}-\frac{4}{3x}} = a^{\frac{x^2-3}{3}}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{3x} = \frac{x^2-3}{3}$$

Multiplicando por $3x$

$6 - 4 = x^3 - 3x$

Transponiendo términos y ordenando

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	$\boxed{0}$

$$x^3-3x-2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ejercicio 21 $\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}}=\sqrt[3]{a^{-x}}\ \sqrt[6]{a^{11x+3}}$siendo $a>0$

$\sqrt{a^{\frac{6}{x}}}\sqrt[4]{a^{x^2}}=\sqrt[3]{a^{-x}}\ \sqrt[6]{a^{11x+3}}\rightarrow a^{\frac{6}{2x}}a^{\frac{x^2}{4}}=a^{\frac{-x}{3}}a^{\frac{11x+3}{6}}\rightarrow a^{\frac{6}{2x}+\frac{x^2}{4}}=a^{\frac{-x}{3}+\frac{11x+3}{6}}$

$$\frac{6}{2x}+\frac{x^2}{4}=\frac{-x}{3}+\frac{11x+3}{6}$$

Multiplicando por $12x$
$36+3x^3=-4x^2+22x^2+6x$
Reduciendo , transponiendo y ordenando términos

$$3x^3-18x^2-6x+36=0$$

dividiendo por 3

$$x^3-6x^2-2x+12=0$$

Para resolver esta ecuación, utilizaremos la regla de Ruffini

	1	-6	-2	+12
6		6	0	-122
	1	0	-2	$\boxed{0}$

$$x^3-6x^2-2x+12=0\Leftrightarrow(x-6)(x^2-2)=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-6=0\rightarrow x=6\\ x^2-2=0\rightarrow x=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ejercicio 22 $\dfrac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3}=\sqrt[3]{a^{x+4}}$ siendo $a>0$

$\dfrac{\sqrt[4]{a^{x^2-1}}}{a^3}=\sqrt[3]{a^{x+4}}\rightarrow\dfrac{a^{\frac{x^2-1}{4}}}{a^3}=a^{\frac{x+4}{3}}\rightarrow a^{\frac{x^2-1}{4}-3}=a^{\frac{x+4}{3}}$

$$\frac{x^2-1}{4}-3=\frac{x+4}{3}$$

Multiplicando por 12
$3x^2-3-36=4x+16$
Transponiendo términos y ordenando

$$3x^2-4x-55=0\rightarrow x=\left\{\begin{array}{c}5\\ -\frac{11}{3}\end{array}\right.$$

Ejercicio 23 $a^{x^2-x+1}=\frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}}$ siendo $a>0$

$a^{x^2-x+1}=\frac{1}{a^{\sqrt{2}-3}}\rightarrow a^{x^2-x+1}=a^{-\sqrt{2}+3}$

$$x^2-x+1=-\sqrt{2}+3\rightarrow x^2-x+\left(-2+\sqrt{2}\right)=0$$

Resolviéndola

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2}=\frac{1\pm\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2}=$$

$$x=\begin{cases}\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\end{cases}$$

Ejercicio 24 $a^{3x+5}-a^{2x}=0$ siendo $a>0$

$a^{3x+5}-a^{2x}=0\rightarrow a^{3x+5}=a^{2x}$

Como $a>0$;podemos dividir la ecuación por a^{2x}. Con lo que obtenemos la ecuación:

$$\frac{a^{3x+5}}{a^{2x}}=\frac{a^{2x}}{a^{2x}}\rightarrow a^{x+5}=1=a^{0}$$

De donde

$$x+5=0\rightarrow x=-5$$

Ejercicio 25 $2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=27^{x+2}\cdot 16$

$2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=27^{x+2}\cdot 16\rightarrow 2^{3x-1}\cdot 3^{3x+6}=3^{3x+6}\cdot 16$

Dividiendo por 3^{3x+6}

$2^{3x-1}=16=2^{4}\rightarrow 3x-1=4\rightarrow x=\frac{5}{3}$

Ejercicio 26 $\dfrac{8^{x}+16}{2}=8^{x-1}+\dfrac{19}{2}$

$\dfrac{8^{x}+16}{2}=8^{x-1}+\dfrac{19}{2}\rightarrow\dfrac{8^{x}+16}{2}=\dfrac{8^{x}}{8}+\dfrac{19}{2}$

Multiplicando por 8

$4\cdot 8^{x}+64=8^{x}+76$

Aislando 8^{s}

$3\cdot 8^{x}=12\rightarrow 8^{x}=4\rightarrow\left(2^{3}\right)^{x}=2^{2}\rightarrow 2^{3x}=2^{2}\rightarrow 3x=2$

$$x=\frac{2}{3}$$

Ejercicio 27 $4^{2x+1}-3\cdot 4^{x}-10=0$

Como $4^{2x+1}=4\cdot\left(4^{x}\right)^{2}$ entonces:

$4^{2x+1}-3\cdot 4^{x}-10=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(4^{x}\right)^{2}-3\cdot 4^{x}-10=0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$4^{x}=\frac{3\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{3\pm 13}{8}=\begin{cases}2\\ -\frac{5}{4}\end{cases}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones exponenciales elementales.

$2^{2x}=4^{x}=2^{1}$ $x=\frac{1}{2}$	$4^{x}=-\frac{5}{4}$ Imposible; ya que $4^{x}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Ejercicio 28 Resuelve tú $4^{x}-16^{x}=4^{2x-1}-3$