ECUACIONES Y SISTEMAS

1. (4 puntos). Resuelve las siguientes ecuaciones por los procedimientos que consideres más adecuados:

   a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

   b) $x + \sqrt{10 + x^2} = 5$

   c) $x - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{3x-1}{2}$

   d) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

2. (1,5 puntos). Resuelve el siguiente sistema por el procedimiento que consideres más adecuado:

$$\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2} + \dfrac{2(y-2)}{3} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{2(y+2)}{5} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

3. (1,5 puntos) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm. Calcular las longitudes de los catetos, sabiendo que su diferencia es de 7 cm

4. (1,5 puntos) Un comerciante quiere vender por 60.000 € los ordenadores que tiene en su almacén. Pero se le estropean dos y tiene que vender los otros 50 € más caros para recaudar lo mismo. ¿Cuántos ordenadores tenía y a qué precio los vendió?

(1) a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ Ecuación grado 3

Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

	1	-6	9	-4
1	↓	1	-5	4
	1	-5	4	0

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \text{ doble} \\ x = 4 \end{array}}$$

b) $x + \sqrt{10 + x^2} = 5$ Ecuación irracional

$(\sqrt{10 + x^2})^{\cancel{2}} = (5 - x)^2$

$10 + \cancel{x^2} = 25 + \cancel{x^2} - 10x$; $10x = 15$; $x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

Comprobamos la solución:

$\frac{3}{2} + \sqrt{10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 5$; $\frac{3}{2} + \sqrt{10 + \frac{9}{4}} = 5$; $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = 5$; $\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$

$\frac{10}{2} = 5$ ✓

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

c) $x - \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x-1}{2}$

$\frac{2x(x+1)}{2\cancel{(x+1)}} - \frac{2(x-1)}{2\cancel{(x+1)}} = \frac{(3x-1)(x+1)}{2\cancel{(x+1)}}$; $2x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 = 3x^2 + 3x - x - 1$

$-x^2 - 2x + 3 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array}}$$

d) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

$(2^2)^{x^2+1} = 2^{5x+5}$; $2^{2x^2+2} = 2^{5x+5} \longleftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5$; $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}}$$

2)

$$\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2} + \dfrac{2(y-2)}{3} = \dfrac{13}{6} & (1) \\ \dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{2(y+2)}{5} = \dfrac{5}{2} & (2) \end{cases}$$

Opero ambas ecuaciones para escribirlas de la forma: $ax + by = c$

$$\frac{9(x-1)}{\cancel{6}} + \frac{4(y-2)}{\cancel{6}} = \frac{13}{\cancel{6}} \; ; \; 9x - 9 + 4y - 8 = 13 \; ; \; 9x + 4y = 30$$

$$\frac{15(x+1)}{\cancel{10}} - \frac{4(y+2)}{\cancel{10}} = \frac{25}{\cancel{10}} \; ; \; 15x + 15 - 4y - 8 = 25 \; ; \; 15x - 4y = 18$$

Utilizo el método de reducción

$$+\begin{cases} 9x + \cancel{4y} = 30 \\ 15x - \cancel{4y} = 18 \end{cases}$$
$$24x = 48$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$9x + 4y = 30 \; ; \; y = \frac{30 - 9x}{4} = \frac{30 - 9 \cdot 2}{4} = \frac{30 - 18}{4} = \frac{12}{4} = 3 \; ; \; \boxed{y = 3}$$

Las soluciones del sistema son:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 2 \\ y = 3 \end{matrix}}$$

3)

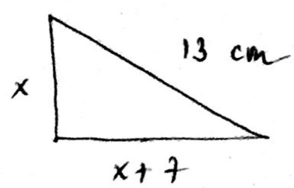
Datos:

Triángulo rectángulo

Hipotenusa = 13 cm

7 cm de diferencia entre catetos

¿Longitud catetos?



Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = x^2 + (x+7)^2$$

$$169 = x^2 + x^2 + 49 + 14x$$

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2} \begin{cases} \boxed{x_1 = 5} \\ \cancel{x_2 < 0} \end{cases}$$

Los catetos miden 5 cm y 12 cm

④ Datos:

Ordenadores

Precio total = 60.000 €

Se estropean 2

$\Rightarrow$ el resto + 50 €

¿número ordenadores?

¿precio de venta?

x = número de ordenadores

$$\underbrace{\frac{60000}{x}}_{\text{precio de 1 ordenador}} + 50 = \underbrace{\frac{60000}{x-2}}_{\text{precio de 1 ordenador si se estropean dos}}$$

$$\frac{60000(x-2)}{x\cancel{(x-2)}} + \frac{50x(x-2)}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{60000x}{x\cancel{(x-2)}}$$

$$\cancel{60000x} - 120000 + 50x^2 - 100x = \cancel{60000x}$$

$$50x^2 - 100x - 120000 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2400 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2400)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{9604}}{2} = \frac{2 \pm 98}{2}$$

$x_1 = 50$

$\cancel{x_2 < 0}$

$$\frac{60000}{50} = 1200 \text{ €/ordenador}$$

Tenía 50 ordenadores que pensaba vender a 1200 € cada uno.
Al estropearse 2 ordenadores, se quedó con 48 y tuvo que venderlos a 1250 € cada uno.

Otra forma de resolver $\Rightarrow$ mediante un sistema de ecuaciones

x = número de ordenadores

y = precio por ordenador

$$\begin{cases} xy = 60000 \\ (x-2)(y+50) = 60000 \end{cases}$$