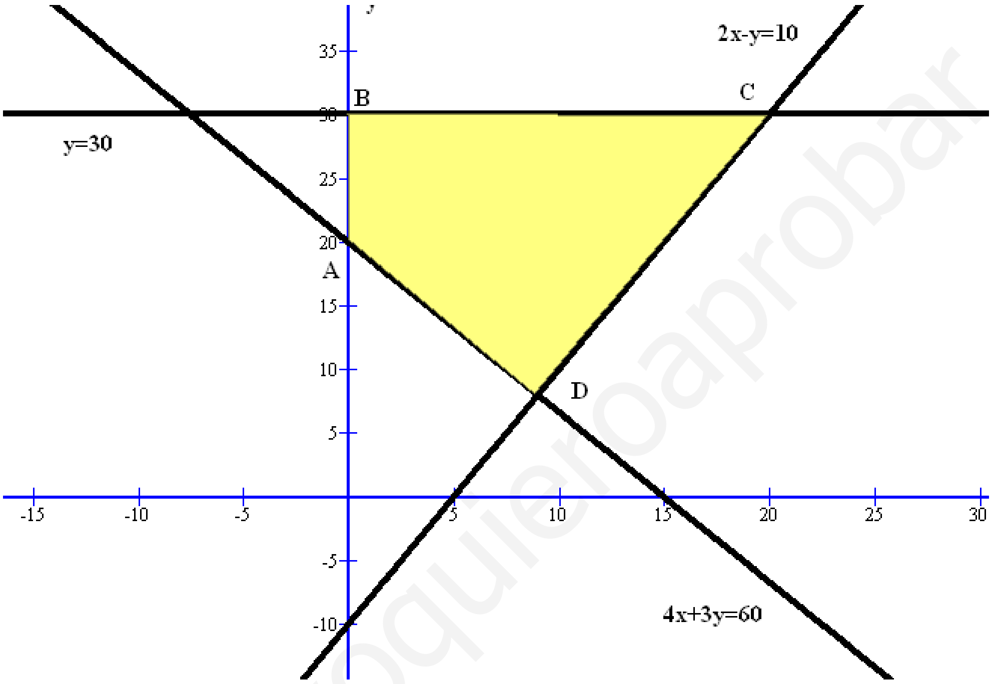
1.- ***(2 puntos) De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:***

$4x+3y\geq 60 \quad ; \quad y\leq 30 \quad ; \quad x\leq \dfrac{10+y}{2} \quad ; \quad x\geq 0 \quad ; \quad y\geq 0$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices

b) Calcule el máximo y el mínimo en esa región factible de la función $F(x,y)=x+3y$ y los puntos donde se alcanzan

a) Si representamos la región factible se obtiene el siguiente recinto:



Los vértices A, B y C del recinto se obtienen de forma inmediata:
A(0,20), B(0,30) y C(20,30)
Para obtener el vértice D resolvemos el sistema formado por las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ 2x-y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ 6x-3y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow 10x=90 \Rightarrow x=9 \ , \ y=8$$

Luego el vértice es el punto D(9,8)

b) Como la región factible es una región acotada, la función objetivo tendrá tanto máximo como mínimo en dicha región. Si sustituimos en la función los cuatro vértices (también se puede hacer usando el vector asociado a la función objetivo) se obtiene:

F(A)=F(0,20)=60 ; F(B)=F(0,30)=90
F(C)=F(20,30)=110 ; F(D)=F(9,8)=33
Luego la función alcanza su mínimo en el punto D(9,8) y vale 33, y su máximo en el punto C(20,30) y vale 110.

2.- ***(2 puntos) Un concesionario de coches comercializa dos modelos de automóviles: uno de gama alta, con el que gana 1000 € por unidad vendida, y el otro de gama baja cuyos beneficios por unidad vendida son de 600 €. Por razón de mercado, la venta anual de estos modelos está sujeta a las siguientes restricciones:***

- ***Se deben vender por lo menos 50 coches de gama alta, y como mucho 350 coches de gama baja.***
- ***El número de modelos de gama baja vendidos ha de ser mayor o igual que el de gama alta***
- ***El concesionario puede vender un máximo de 500 automóviles al año***

¿Cuántos automóviles de cada modelo se debe vender anualmente para maximizar los beneficios? ¿Cúales serán éstos?

Si llamamos:

x = "número de automóviles de gama alta"

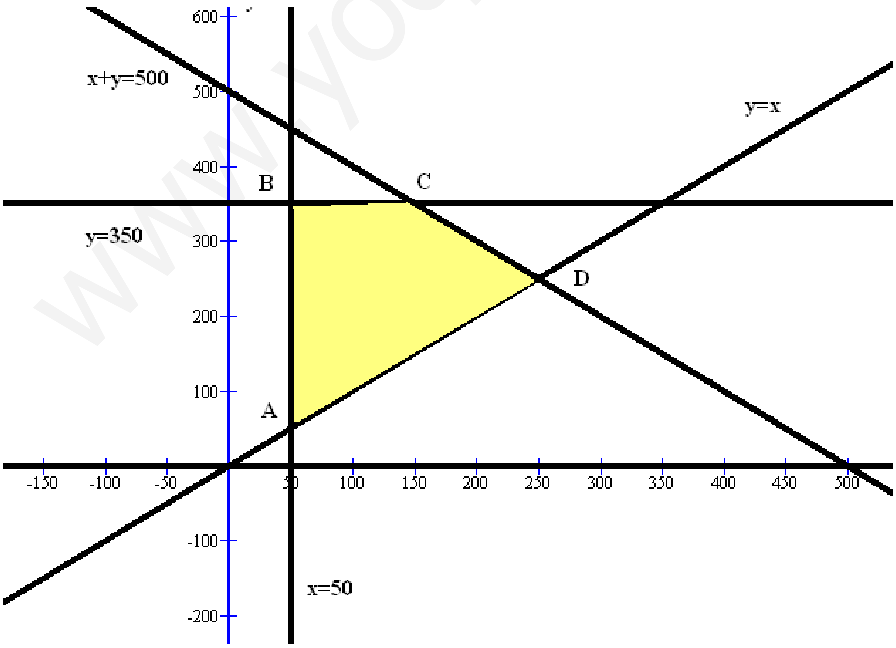
y = "número de automóviles de gama baja"

El planteamiento del problema de programación lineal sería:

Maximizar F(x,y)= 1000x + 600y

$$\text{s.a.:}\quad \begin{cases} x \geq 50 \\ y \leq 350 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si representamos gráficamente la región factible:



Los vértices A, B y C del recinto se obtienen de forma inmediata:
A(50,50), B(50,350) y C(150,350)
Para obtener el vértice D resolvemos el sistema formado por las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ x + y = 500 \end{array}\right\} \Rightarrow D(250,250)$$

Como la región factible es una región acotada, la función objetivo tendrá tanto máximo en dicha región. Si sustituimos en la función los cuatro vértices (también se puede hacer usando el vector asociado a la función objetivo) se obtiene fácilmente que el punto donde se alcanza el máximo es el D:
F(D) = F(250,250) = 400.000

Luego para obtener el máximo beneficio debe vender anualmente 250 automóviles de cada tipo y obtendría así un beneficio de 400.000 euros.

3.- ***(1'5 puntos) La probabilidad de que una persona apruebe la parte teórica del carnet de conducir es 0'45, de que apruebe la parte práctica es 0'4, y de que apruebe al menos una de las dos es 0'55. Calcular las probabilidades de:***

a) Aprobar las dos partes
b) No aprobar ninguna
c) Aprobar sólo la parte teórica
d) Aprobar la práctica, habiendo aprobado la teórica

Si llamamos T = "aprobar la parte teórica" y P = "aprobar la parte práctica", los datos del problema son:
$P(T) = 0'45$, $P(P) = 0'4$, $P(T \cup P) = 0'55$

a) Como $P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P)$ pues son compatibles (se pueden aprobar las dos partes a la vez), despejando:

$$P(T \cap P) = P(T) + P(P) - P(T \cup P) = 0'45 + 0'4 - 0'55 = 0'3$$

b) $P(\overline{T} \cap \overline{P}) = P(\overline{T \cup P}) = 1 - P(T \cup P) = 1 - 0'55 = 0'45$

c) $P(T \cap \overline{P}) = P(T) - P(T \cap P) = 0'45 - 0'3 = 0'15$

d) $P\left(P/T\right) = \dfrac{P(T \cap P)}{P(T)} = \dfrac{0'3}{0'45} = 0'66$

4.- ***(1'5 puntos) Entre las 7 bolas de una máquina de futbolín hay 2 rojas y 5 blancas; en cada partida, la máquina va sacando las bolas de una en una, de forma aleatoria, sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:***
a) "La primera bola es roja".
b) "Las dos primeras bolas son blancas".
c) "Las dos primeras bolas son de colores distintos".

Si llamamos R = "salir roja" y B = "salir blanca":

a) $P(R) = \dfrac{2}{7}$ (casos favorables entre casos posibles)

b) $P(B_1 \cap B_2) = al\ ser\ dependientes = P(B_1) \cdot P\left(B_2/B_1\right) = \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{20}{42} = \dfrac{10}{21}$

c)
$$P[(B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)] = al\ ser\ incompatibles = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2)$$
$$= al\ ser\ dependientes = P(B_1) \cdot P\left(R_2/B_1\right) + P(R_1) \cdot P\left(B_2/R_1\right) =$$
$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{21}$$

5.- ***(1'5 puntos) De dos sucesos A y B se sabe que:***

$$P(\overline{B}) = \frac{2}{3} \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Calcular razonadamente $P(B)$ ***y*** $P(A)$

¿Son A y B incompatibles? ¿Son A y B independientes? Justifica las respuestas y calcula $P\left(A/B\right)$

Como $P(\overline{B}) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Como hay intersección A y B son compatibles, y por tanto:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de donde despejando P(A) se obtiene:

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

Como además $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4} = PA \cap B)$, los sucesos A y B son dependientes.

Por último: $P\left(A/\overline{B}\right) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{2/3 - 1/4}{2/3} = \dfrac{5}{8}$

6.- ***(1'5 puntos) Un grupo de 40 personas acaba de tomar el autobús. De ellos, sólo 10 son fumadores. Entre los fumadores, el 70 % se marea; entre los no fumadores, esta cantidad baja al 40 %.***

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero escogido al azar no se maree?

b) A la media hora de viaje, un pasajero se encuentra mareado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Si llamamos F = "ser fumador" y M = "marearse", los datos del problema son:

$$P(F) = \frac{10}{40} = 0'25 \quad , \quad P(\overline{F}) = \frac{30}{40} = 0'75 \quad , \quad P\left(M/F\right) = 0'7 \quad , \quad P\left(M/\overline{F}\right) = 0'4$$

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\overline{M}) = P(F) \cdot P\left(\overline{M}/F\right) + P(\overline{F}) \cdot P\left(\overline{M}/\overline{F}\right) = 0'25 \cdot 0'3 + 0'75 \cdot 0'6 = 0'525$$

b) Por el Teorema de Bayes:

$$P\left(F/M\right) = \frac{P(F) \cdot P\left(M/F\right)}{P(M)} = \frac{0'25 \cdot 0'7}{1 - 0'525} = 0'368$$