MATEMÁTICAS 2º BACH. A

1.- **a)** **De una matriz B se sabe que su primera fila es $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$. Complétala de forma razonada para que se cumpla:**

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix},\ \textbf{siendo}\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

b) **Calcula la matriz inversa de $(A\cdot B)^t$**

Solución:

a) En primer lugar, para que la matriz *AB* tenga sentido y de una matriz cuadrada de orden 2, la matriz *B* tiene que ser de orden *3x2*, es decir: $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Multiplicamos e igualamos:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2a+2c & 2b+2d\\ 2+a-c & b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-1+2a+2c=5\\ 2+a-c=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=2, c=1$$

$$\left.\begin{matrix}2b+2d=-2\\ b-d=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=2, d=-3$$

Luego la matriz pedida es $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

b) Como $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, $y\ \left|(A\cdot B)^t\right|=31$, calculamos su adjunta:

$$\left((A\cdot B)^t\right)^*=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

Y su matriz inversa será: $\left((A\cdot B)^t\right)^{-1}=\dfrac{\left(\left((A\cdot B)^t\right)^*\right)^t}{\left|(A\cdot B)^t\right|}=\dfrac{1}{31}\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

2.- **Dadas las matrices:** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) **Calcular la matriz inversa de la matriz $C=B-I$**

b) **Resolver la ecuación matricial $C\cdot X-4A=0$**

Solución

a) Como $C = B - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Su determinante es: $|C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Y su adjunta (hacerlo como ejercicio): $C^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Su inversa será: $C^{-1} = \dfrac{\left(C^*\right)^t}{|C|} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Despejamos X:

$C \cdot X - 4A = 0 \;\Rightarrow\; C \cdot X = 4A \;\Rightarrow C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot 4A \;\Rightarrow\; X = C^{-1} \cdot 4A$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

3.- Una empresa monta ordenadores de dos tipos: mesa y portátiles. Para cada clase de ordenador elabora 3 calidades: alta, media y baja.
En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los cuales 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja para los de mesa, y 30 de calidad alta, 30 de calidad media y 40 de calidad baja para los portátiles.
Para los ordenadores de mesa se invierten cuatro horas de montaje y siete de instalación de software, y para los portátiles, seis y ocho horas, respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas)
b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de instalación de software (filas) para cada tipo de ordenador (columnas)
c) Calcula e interpreta la matriz $A \cdot B^t$

Solución

a) $A = \begin{array}{r} \\ Alta \\ Media \\ Baja \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} M & P \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $B = \begin{array}{r} \\ Mont. \\ Inst. \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} M & P \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$

c) $A \cdot B^t = \begin{array}{r} \\ Alta \\ Media \\ Baja \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} M & P \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{r} \\ Mesa \\ Port. \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} M & I \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{r} \\ Alta \\ Media \\ Baja \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} M & I \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 260 & 380 \\ 340 & 520 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} \end{array}$

Esta matriz indica el número total de horas de montaje o de instalación de software para todos los ordenadores tanto de mesa como portátiles según su calidad. Por ejemplo, en montar todos los ordenadores de baja calidad se tardan 340 horas, mientras que en la instalación de software para todos los ordenadores de baja calidad se tardan 520 horas.

4. **a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:**

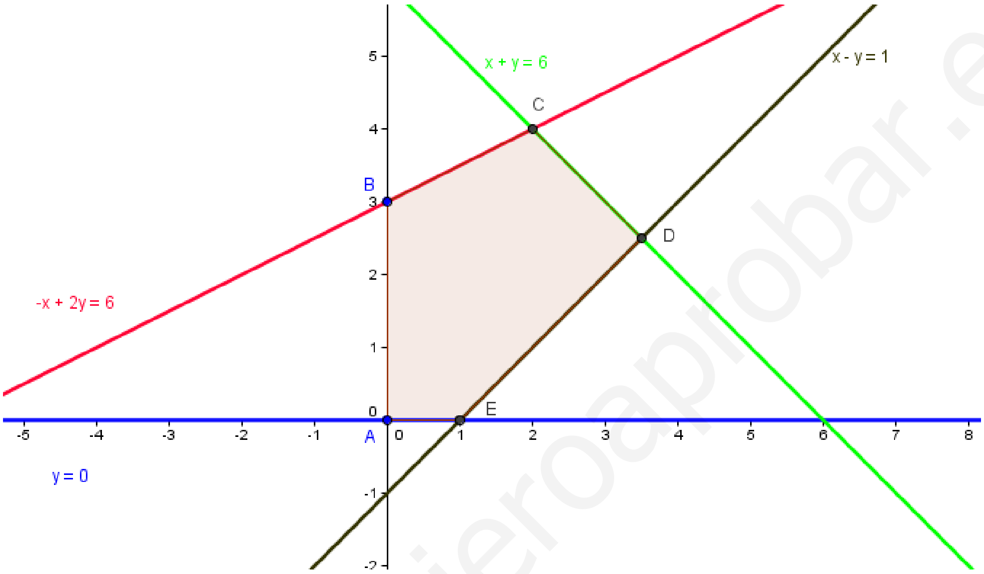
$$y \geq 0 \;\; ; \;\; -x+2y \leq 6 \;\; ; \;\; x+y \leq 6 \;\; ; \;\; x-y \leq 1$$

b) ¿Pertenece el punto (1’5,0’4) a dicho recinto

c) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=2x+2y+1$ **en la región anterior e indique dónde se alcanzan.**

Solución

a)



b) El punto *(1’5,0’4)* no está en el recinto porque *1’5-0’4=1’1>1* y por tanto no cumple la última inecuación del sistema.

c) Si calculamos los vértices (hacerlo como ejercicio) obtenemos:

$A(0,0),\ B(0,3),\ C(2,4),\ D\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)\ y\ E(1,0)$

Como la región factible es un polígono cerrado, la función objetivo alcanzará su máximo y su mínimo en sus vértices. Sustituimos:

$$F_A(0,0)=1\ ;\ F_B(0,3)=7\ ;F_C(2,4)=13\ ;\ F_D\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=13\ ;\ F_E(1,0)=3$$

Luego el mínimo se alcanza en el punto *A(0,0)* y vale 1, y el máximo se alcanza en todo el segmento de extremos los puntos *C(2,4)* *y* $D\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$ y vale 13

5. **Una marca fabrica dos tipos de ciclomotores, A y B. Por cada unidad del modelo A se obtienen 600 euros de beneficios, mientras que por cada unidad del modelo B se obtienen 900 euros de beneficio. Por cuestiones de demanda, debe fabricar un máximo de 125 ciclomotores del modelo A y al menos 50 del modelo B. El número total de ciclomotores fabricados no debe superar los 200, y los ciclomotores del modelo A deben ser al menos tantos como los del modelo B.**

a) Plantea el problema de programación lineal para calcular cuántos ciclomotores debe fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo.

b) Resuelve el problema anterior

c) ¿Entre qué valores estarán los beneficios de la empresa?

Solución

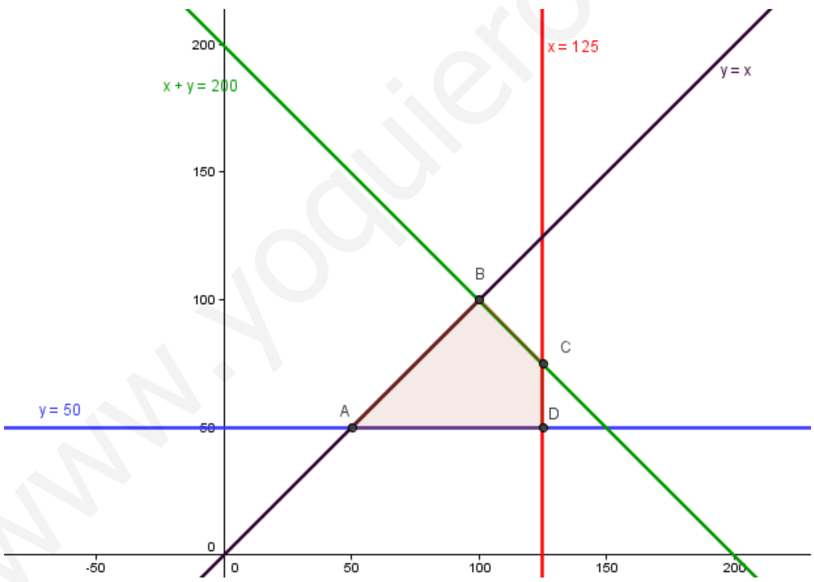
a) Si llamamos x = *"nº ciclomotores del tipo A"* y y = *"nº ciclomotores del tipo B"*, el planteamiento del problema da lugar al siguiente conjunto de restricciones:

$$Máx \;\; F(x,y) = 600x + 900y$$

$$s.a.\begin{cases} x \le 125 \\ y \ge 50 \\ x + y \le 200 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \end{cases}$$

(No hace falta $y \ge 0$ puesto que una restricción ya es $y \ge 50 =$

b) Para resolverlo representamos la región factible y calculamos sus vértices:



Si calculamos los vértices (hacerlo como ejercicio) obtenemos:
A(50,50), B(100,100), C(125,75) y D(125,50)

Como la región factible es un polígono cerrado, la función objetivo alcanzará su máximo y su mínimo en sus vértices. Sustituimos:

$$F_A(50,50) = 75000 \;\; ; \;\; F_B(100,100) = 150000 \;; \; F_C(125,75) = 142500 \;\; ; \;\; F_D(125,50) = 120000$$

Luego se deben fabricar 100 ciclomotores de cada tipo para obtener un beneficio máximo de 150.00 €.

c) A la vista de los datos anteriores, los beneficios de la empresa estarán entre los 75.000 (50 ciclomotores de cada tipo) y los 150.000 € (100 ciclomotores de cada tipo)