

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA EN PUNTO (x_0, y_0)

Una función $F(x,y) = 0$ es implícita cuando es difícil o imposible despejar la y .

x : variable independiente y : variable dependiente

Ejemplos:

a) $x^2 + y^2 = 9$

Derivando en ambos miembros: $2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = \frac{-x}{y}$

e) $x^3 + y^3 = -2xy \rightarrow x^3 + y^3 + 2xy = 0$

Derivando en ambos miembros: $3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') = 0 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 2y + 2x \cdot y' = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y' \cdot (3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y \rightarrow y' = \frac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$$

CÁLCULO DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA DADA IMPLÍCITAMENTE EN UN PUNTO

Halla la ecuación de la(s) recta(s) tangente(s) a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $3x^2 - 5x \cdot y + 2y^2 - x - y^3 - 27 = 0$ [I] en el punto de abscisa $x_0 = 3$

1º) Calculamos y' :

$$6x - (5y + 5xy') + 4yy' + 2y^2 - 3y^2y' = 0 \rightarrow 6x - 5y - 5xy' + 4yy' + 2y^2 - 3y^2y' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y' \cdot (-3y^2 + 4y - 5x) = -2y^2 + 5y - 6x \rightarrow y' = \frac{2y^2 - 5y + 6x}{3y^2 - 4y + 5x} \quad \text{[II]}$$

2º) Calculamos y_0 sustituyendo x_0 en [I]:

$$27 - 15y_0 + 6y_0^2 - y_0^3 - 27 = 0 \rightarrow y_0^3 - 6y_0^2 + 15y_0 = 0 \rightarrow y_0 \cdot (y_0^2 - 6y_0 + 15) = 0 \rightarrow y_0 = 0$$

Nota: La ecuación $y_0^2 - 6y_0 + 15 = 0$ no tiene soluciones reales

3º) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la curva [I] en el punto $P_0(x_0, y_0) = (3, 0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = y'(3, 0)$

Sustituyendo en [II]: $m = y'(3, 0) = 18/15 = 6/5$; $m = 6/5$

Solución: $y = \frac{6}{5}(x-3)$

b) $\sin(x^2y) - y^2 + x - 2 + \frac{\pi^2}{16} = 0$ [I] en el punto $P_0(2, \frac{\pi}{4})$:

1º) Calculamos y' :

$$(2xy + x^2y') \cdot \cos(x^2y) - 2yy' + 1 = 0 \rightarrow y' = \frac{2xy \cdot \cos(x^2y) + 1}{2y - x^2 \cdot \cos(x^2y)} \quad \text{[II]}$$

2º) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la curva [I] en el punto $P_0(2, \frac{\pi}{4})$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = y'(2, \frac{\pi}{4})$

Sustituyendo en [II]: $m = y'(2, \frac{\pi}{4}) = \frac{2-2\pi}{\pi+8}$

Solución: $y - \frac{\pi}{4} = \frac{2-2\pi}{\pi+8}(x-2)$

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0$ [I] en el punto de abscisa $x_0 = 5$

1º) Calculamos y' :

$$2(x - 2) + 2(y + 1) \cdot y' = 0 \rightarrow 2x - 4 + 2yy' + 2y' = 0 \rightarrow \boxed{y' = \frac{2-x}{y+1}} \quad \text{[II]}$$

2º) Calculamos y_0 sustituyendo x_0 en [I]:

$$9 + (y_0 + 1)^2 - 25 = 0 \rightarrow y_{01} = 3; y_{02} = -5 \rightarrow \text{Hay 2 valores de } y \text{ para } x_0 = 5$$

3º) Calculamos las ecuaciones de la rectas tangentes a la curva [I]:

Sustituyendo en [II]: $y'(5, 3) = -3/4$; $y'(5, -5) = -3/4$

Solución:

- Recta tangente en $P_{01}(5, 3)$: $y+3 = \frac{-3}{4}(x-5)$

- Recta tangente en $P_{02}(5, -5)$: $y-3 = \frac{3}{4}(x-5)$