CÁLCULO DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA DADA IMPLÍCITAMENTE EN UN PUNTO $P_0(x_0, y_0)$

Ejercicio 1) Halla la ecuación de la(s) recta(s) tangente(s) a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $3x^2 - 5x \cdot y + 2y^2 \cdot x - y^3 - 27 = 0$ [I] en el punto de abcisa $x_0 = 3$

1º) Calculamos y':

$$6x - (5y + 5xy') + 4yy' + 2y^2 - 3y^2y' = 0 \rightarrow 6x - 5y - 5xy' + 4yy' + 2y^2 - 3y^2y' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y' \cdot (-3y^2 + 4y - 5x) = -2y^2 + 5y - 6x \rightarrow \boxed{y' = \frac{2y^2 - 5y + 6x}{3y^2 - 4y + 5x}} \text{ [II]}$$

2º) Calculamos y_0 sustituyendo x_0 en [I]:

$$27 - 15y_0 + 6y_0^2 - y_0^3 - 27 = 0 \rightarrow y_0^3 - 6y_0^2 + 15y_0 = 0 \rightarrow y_0 \cdot (y_0^2 - 6y_0^3 + 15) = 0 \rightarrow y_0 = 0$$

Nota: La ecuación $y_0^2 - 6y_0^3 + 15 = 0$ no tiene soluciones reales

3º) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la curva [I] en el punto $P_0(x_0, y_0) = (3, 0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = y'(3, 0)$

Sustituyendo en [II]: $m = y'(3, 0) = 18/15 = 6/5$; $m = 6/5$

Solución: $\boxed{y = \frac{6}{5}(x - 3)}$

---

b) $\operatorname{sen}(x^2y) - y^2 + x - 2 + \frac{\pi^2}{16} = 0$ [I] en el punto $P_0\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$:

1º) Calculamos y':

$$(2xy + x^2y') \cdot \cos(x^2y) - 2yy' + 1 = 0 \rightarrow \boxed{y' = \frac{2xy \cdot \cos(x^2y) + 1}{2y - x^2 \cdot \cos(x^2y)}} \text{ [II]}$$

2º) Calculamos la ecuación de la recta tangente a la curva [I] en el punto $P_0\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde $m = y'(2, \Pi/4)$

Sustituyendo en [II]: $m = y'\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - 2\pi}{\pi + 8}$

Solución: $\boxed{y - \frac{\pi}{4} = \frac{2 - 2\pi}{\pi + 8}(x - 2)}$

---

c) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0$ [I] en el punto de abcisa $x_0 = 5$

1º) Calculamos y':

$$2(x - 2) + 2(y + 1) \cdot y' = 0 \rightarrow 2x - 4 + 2yy' + 2y' = 0 \rightarrow \boxed{y' = \frac{2 - x}{y + 1}} \text{ [II]}$$

2º) Calculamos y_0 sustituyendo x_0 en [I]:

$$9 + (y_0 + 1)^2 - 25 = 0 \rightarrow y_{01} = 3; \; y_{02} = -5 \rightarrow \text{Hay 2 valores de y para } x_0 = 5$$

3º) Calculamos las ecuaciones de la rectas tangentes a la curva [I]:
Sustituyendo en [II]: $y'(5, 3) = -3/4$; $y'(5, -5) = -3/4$

Solución:

- Recta tangente en $P_{01}(5, 3)$: $\boxed{y + 5 = \frac{-3}{4}(x - 5)}$
- Recta tangente en $P_{02}(5, -5)$ = $\boxed{y - 3 = \frac{3}{4}(x - 5)}$