

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x - \operatorname{arcsen} x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

2. Representa una función par (simétrica respecto del eje y) que cumpla:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 3$$

3. Halla la expresión de la función recíproca de $f(x) = \frac{3-4x}{2x+1}$. Estudia también el dominio y el recorrido de ambas funciones.

4. Deriva logarítmicamente simplificando la expresión final lo más posible: $y = \frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2}$

5. Razona si la siguiente frase es verdadera o falsa poniendo un ejemplo si fuese necesario:

Que la derivada de una función $f(x)$ en $x = 2$ sea 5, implica que **necesariamente** la función sea continua en el punto $(2, 5)$

6. Halla el punto de la curva $y = 6 \ln x - 2x$ en el que la recta tangente forma un ángulo de 135° con respecto al eje X

(Contesta 3 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 2 puntos sobre el total de 10 del examen)

7. Halla el punto de la parábola $y = x^2 + x$ más cercano al punto $P(7, 5)$

8. Estudia gráficamente $y = \frac{x^2}{\ln x}$

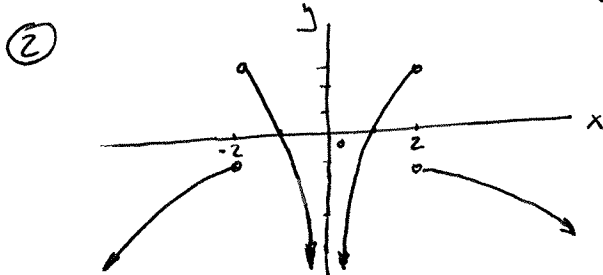
9. Halla los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

10. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Determine razonadamente el valor del parámetro k para que la función $f(x)$ sea continua para todos los números reales

b) Estudie si esta función es derivable en $x = 0$ y en caso afirmativo halle $f'(x)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x - \arcsin x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{\frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1} \end{aligned}$$



③

$$y = \frac{3-4x}{2x+1}$$

$$x = \frac{3-4y}{2y+1}; \quad 2xy+x=3-4y; \quad 2xy+4y=3-x; \quad y = \frac{3-x}{2x+4}$$

$$f(x) = \frac{3-4x}{2x+1} \rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R} - \{-1/2\} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{im } f = \mathbb{R} - \{-2\} \\ \searrow \text{im } f^{-1} = \mathbb{R} - \{-1/2\} \end{matrix}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2x+4} \rightarrow \text{dom } f^{-1} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

④

$$y = \frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2}; \quad \ln y = \ln(4-x^2) + \frac{1}{3}\ln(x+2) - \ln(x-2)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-2x}{4-x^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4} + \frac{1}{3(x+2)} - \frac{1}{x-2} =$$

$$= \frac{6x + x - 2 - 3(x+2)}{3(x^2-4)} = \frac{4x-8}{3(x^2-4)} = \frac{4(x-2)}{3(x^2-4)}$$

$$y' = \frac{4(x-2)}{3(x^2-4)} \cdot y = \frac{4(x-2)}{3(x^2-4)} \cdot \frac{(4-x^2)\sqrt[3]{x+2}}{x-2} =$$

$$= \frac{-4(x^2-4)\sqrt[3]{x+2}}{3(x^2-4)} = \boxed{-\frac{4}{3}\sqrt[3]{x+2}}$$

⑤ $f'(2)=5$ significa que f es derivable en $x=2$, por lo que, necesariamente $f(x)$ debe ser continua en $x=2$. lo que no es obligatorio es que el punto sea el $P(2,5)$, ya que 5 es el valor de la derivada no el valor de la función. Por lo tanto, **FALSA**.

⑥

$$y = 6\ln x - 2x \rightarrow y' = \frac{6}{x} - 2$$

$$\alpha = 135^\circ \Rightarrow \text{Tg } \alpha = -1; \quad -1 = \frac{6}{x} - 2; \quad x=6 \rightarrow y = 6\ln 6 - 12$$

El punto es $\boxed{P(6, 6\ln 6 - 12)}$

7

$$P(7,5) \quad Q(x, x^2+x) \quad \overline{PQ} = (x-7, x^2+x-5)$$

$$d = \sqrt{(x-7)^2 + (x^2+x-5)^2}$$

$$d' = \frac{\cancel{2}(x-7) + \cancel{2}(x^2+x-5)(2x+1)}{\cancel{2}\sqrt{(x-7)^2 + (x^2+x-5)^2}} = \frac{x-7 + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 10x - 5}{\sqrt{(x-7)^2 + (x^2+x-5)^2}} =$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x - 12}{\sqrt{(x-7)^2 + (x^2+x-5)^2}}$$

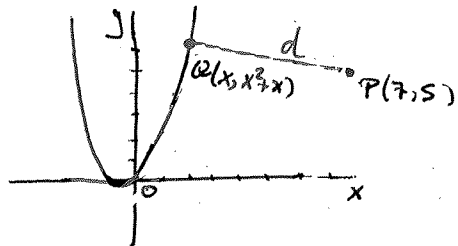
$$d' = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 3 & -8 & -12 \\ & & 4 & 14 & 12 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{matrix} -3/2 \\ -2 \end{matrix}$$

	-2	-3/2	2	
d'	-	+	-	+
d	↔	↔	↔	↔
	MIN	MAX	MIN	



La función distancia tiene dos mínimos locales (y un máximo local).
En el perfil: quedaría comprobar cuál es el mínimo absoluto. Comparamos:

$$x = -2 \rightarrow d = \sqrt{(-2-7)^2 + ((-2)^2 + (-2) - 5)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$x = 2 \rightarrow d = \sqrt{(2-7)^2 + (2^2 + 2 - 5)^2} = \sqrt{26}$$

El punto más cercano es: $Q(2, 2^2+2) = (2, 6)$

8

$$y = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{dominio} = (0, +\infty) - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asíntota vertical $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \rightarrow$ No tiene Asíntota Horizontal. Podría tenerla oblicua.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2/\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \rightarrow$ No tiene Asíntota oblicua

$$y' = \frac{2x \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2} = 0 ; 2x \ln x - x = 0 ; x(2 \ln x - 1) = 0$$

$\rightarrow x \neq 0$ No pertence al dominio
 $\rightarrow 2 \ln x = 1 ; x = e^{1/2}$

	0	1	$e^{1/2}$
y'	-	-	+
y	-	-	+

MIN

$$y'' = \frac{(2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 1) (\ln x)^2 - (2x \ln x - x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^3} = \frac{2 \ln^2 x + 2 \ln x - \ln x - 4 \ln x + 2}{(\ln x)^3} =$$

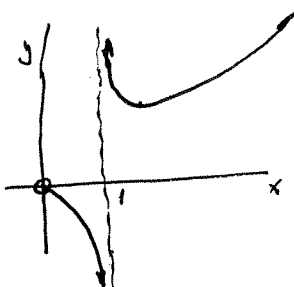
$$= \frac{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2}{(\ln x)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2}{(\ln x)^3} = 0 ; 2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} \quad \text{Absurdo}$$

	0	1
y''	-	+
y	Concava	Convexa

x	y
$e^{1/2}$	$2e$



9) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{dom} f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^{-2} - (2-2x^2) \cdot 2(x^2+1)^{-3} \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 16x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^3 - 12x}{(x^2+1)^3} = 0 ; 12x^3 - 12x = 0 ; 12x(x^2-1) = 0 ; x = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

	-1	0	1
f''	-	+	-
f	Conv.	Conc.	Conv.
	INF	INF	INF

f tiene inflexiones en $x=0, x=1, x=-1$

10) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{dom} f = \mathbb{R}$

f está definida y es continua en cualquier $x \neq 0$, por ser cociente de funciones continuas, no anula el denominador.

Veamos en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{k=1} \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0$$

$$f(0) = k$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{0 - 1 + 1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x e^x - e^x}{2x} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{2x} = \boxed{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$$