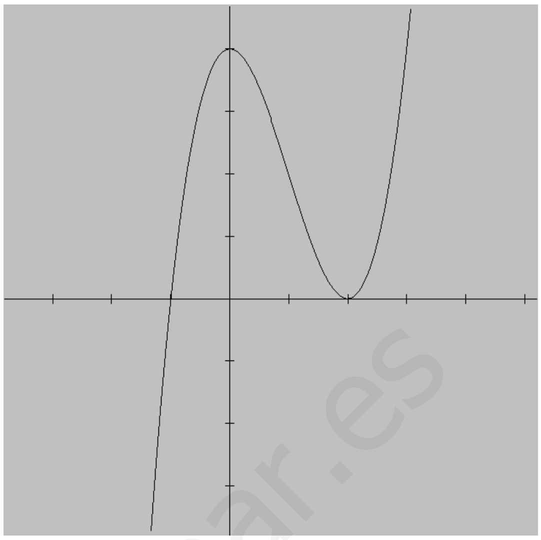
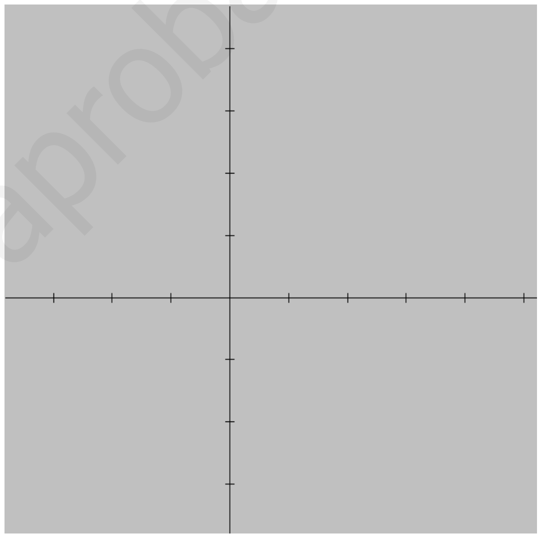
EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. La figura muestra la gráfica de $f'(x)$. Representa justo debajo la gráfica aproximada de $f(x)$ sabiendo que $f(0)=0$ y rotulando los puntos máximos, mínimos y de inflexión.





2. La normal a la curva $y=\frac{k}{x}+\ln x^2$, para $x\neq 0$, $k\in\Re$, en el punto x = 2, tiene por ecuación $3x+2y=b$, donde $b\in\Re$. Halle el valor exacto de *k*.

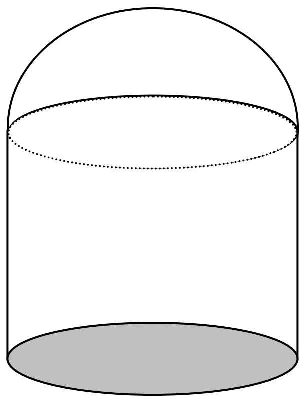
3. Halla: $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$

4. Sea $y=x\cdot arcsenx$ con $x\in(-1,1)$. Demuestra que $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2-x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$

5. Determina los valores de los parámetros de a, b y c para que la siguiente función sea continua y derivable en todos los reales y además tenga un extremo relativo en el punto de abscisa 3:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<2 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

6. El sólido de la figura está formado por un cilindro y media esfera. El común radio está creciendo a una tasa constante de 2 cm/min y el volumen total a una tasa constante de 204 π cm³/min. En el momento en que el radio mide 3 cm, el volumen es 36π cm³. Halla la tasa de variación de la altura del cilindro en ese momento.



① Como $\left.\begin{array}{l} f'(-1)=0 \\ f'(-1^-)<0 \\ f'(-1^+)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

		-1	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$
		MIN	

f tendrá un mínimo local en $x=-1$

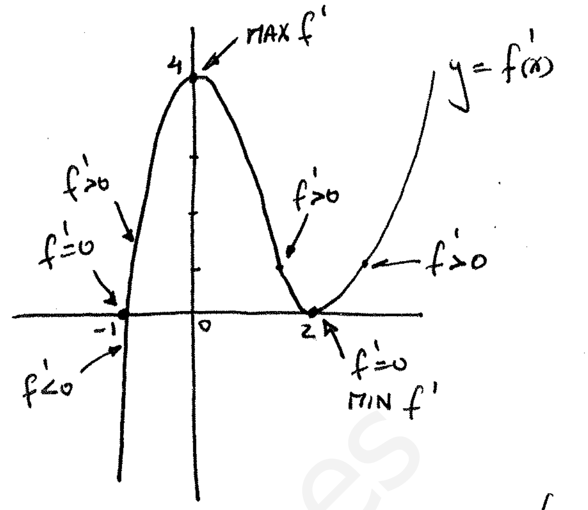
Como: $\left.\begin{array}{l} f'(2)=0 \\ f'(2^-)>0 \\ f'(2^+)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

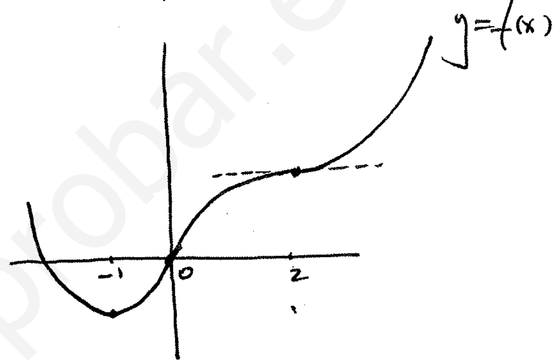
		2	
f'	$+$		$+$
	$\nearrow$		$\nearrow$

f no tendrá ni máximo ni mínimo local en $x=2$. Tendrá un punto de inflexión con tangente horizontal.

Como f' tiene un máximo local en $x=0$, su derivada será nula:

$(f')'(0)=0 \rightarrow f''(0)=0$ por lo que f tendrá un punto de inflexión en $x=0$





② $y=\frac{K}{x}+\ln x^2 \longrightarrow y'=-\frac{K}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot 2x = -\frac{K}{x^2}+\frac{2}{x}$

$x=2 \rightarrow y=\frac{K}{2}+\ln 4$

$x=2 \rightarrow y'=-\frac{K}{4}+1$

$3x+2y=b \rightarrow y=\frac{b-3x}{2} \Rightarrow m=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow -\frac{K}{4}+1=-\frac{3}{2}$

$-K+4=-6$

$\boxed{K=10}$

La recta tangente será:

$x=2 \rightarrow y=\frac{10}{2}+\ln 4 = 5+\ln 4$

$x=2 \rightarrow y'=-\frac{3}{2}$

$y-(5+\ln 4)=-\frac{3}{2}(x-2)$

$2y-10-2\ln 4=-3x+6$

$3x+2y=16+2\ln 4$

$\boxed{b=16+2\ln 4}$

③

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{3/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x\cos 2x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\cdot 2}{\cos 2x + x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x}{\cos 2x - 2x\sin 2x}} = e^{\frac{-2}{1-0}} = \boxed{e^{-2}}$$

④

$$y = x\arcsin x$$

$$y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2} - x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \quad ✓$$

⑤ $y = \ln(x^2+1)$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2+1)$ está definido para todo $\mathbb{R}$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=0 \;;\quad 2-2x^2=0 \;;\quad x=\pm 1$$

Convexa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

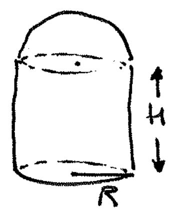
Cóncava en $(-1,1)$

Inflexiones en $x=1$, $x=-1$.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$		$+$		$-$
y	Convexa	INF	Cóncava	INF	Convexa

⑥

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$$



$$\frac{dV}{dt} = \pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}H + \pi R^2\frac{dH}{dt} + \frac{2}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}R^2\frac{dR}{dt}$$

$\frac{dR}{dt}=2$, $\frac{dV}{dt}=204\pi$ $\longrightarrow$ $204\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}RH\cdot 2 + \cancel{\pi}R^2\frac{dH}{dt} + 2\cancel{\pi}R^2\cdot 2$;

$$\frac{dH}{dt} = \frac{204-2RH-2R^2}{R^2}$$

$R=3$, $V=36\pi$ $\longrightarrow$ $36\cancel{\pi} = \cancel{\pi}\cdot 9\cdot H + \frac{2}{3}\cancel{\pi}\cdot 27$; $H = \frac{36-18}{9} = 2$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{204-2\cdot 3\cdot 2-2\cdot 3^2}{3^2} = \boxed{15'3 \text{ cm/min}}$$