EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Calcule a para que las siguientes funciones tengan el mismo límite en el punto 0

   $f(x) = \dfrac{sen\ (ax)}{x} \qquad g(x) = \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

2. Sean las curvas $C_1 : y = -x^2 + 2x - 4$, $C_2 : y = x^2 + kx + k$, donde $k < 0$ es una contante. Ambas curvas pasan por P, punto en el que ambas curvas comparten la misma recta tangente.

   a) Halla *k*.

   b) Halla las coordenadas de *P*.

3. Se desea construir un marco rectangular para una ventana de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical es a 30 € el metro. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste de marco sea mínimo.

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$ estudia la derivabilidad en $x = 1$ utilizando exclusivamente la definición de derivada.

5. Halla los coeficientes de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que la curva pase por el origen de coordenadas y presente en el punto (2, 1) una inflexión con tangente paralela al eje OX.

6. Halla los extremos locales y los puntos de inflexión de la función $y = sen(x^2 + 1)$ para $-2 < x < 2$

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cos ax}{1} = a$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x-1}{x^2} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\cos x \sin x}{2x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\sin x\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\sin^2 x - \cos^2 x}{1} = -1$

$\boxed{a=-1}$

(2) Sea $x=a$ el punto de Tangencia.

$C_1: \; y=-x^2+2x-4 \longrightarrow y'=-2x+2$

$x=a \to y=-a^2+2a-4$

$\quad\;\; \to y'=-2a+2$

$C_2: \; y=x^2+kx+k \longrightarrow y'=2x+k$

$x=a \to y=a^2+ka+k$

$\quad\;\; \to y'=2a+k$

Al coincidir punto y pendiente:

$\left.\begin{array}{l} a^2+ka+k=-a^2+2a-4 \\ 2a+k=-2a+2 \end{array}\right\}$; $\left.\begin{array}{l} 2a^2+(k-2)a+(k+4)=0 \\ k=2-4a \end{array}\right\}$

$2a^2+(\cancel{2}-4a-\cancel{2})a+(2-4a+4)=0$

$2a^2-4a^2+6-4a=0$

$-2a^2-4a+6=0$

$a+2a-3=0$

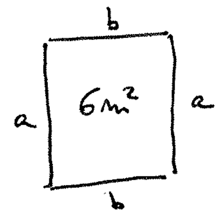
$a=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2\pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1 \longrightarrow k=2-4\cdot 1=-2 \\ \searrow -3 \longrightarrow k=\cancel{2-4(-3)=14} \end{array}$ No es solución porque $K<0$.

$\boxed{k=-2}$

$a=1 \longrightarrow y=-1^2+2\cdot 1-4=-3$ $\quad\boxed{P(1,-3)}$

(3) Minimizar: $C=2a\cdot 30+2b\cdot 60=$

$=60a+120b$



Siendo: $a\cdot b=6$

$b=\dfrac{6}{a}$

$C=60a+120\,\dfrac{6}{a} = 60a+\dfrac{720}{a}$

$\dfrac{dC}{da}=60-\dfrac{720}{a^2}$

$\frac{dC}{da}=0 \Rightarrow 60-\frac{720}{a^2}=0 \;;\quad 60=\frac{720}{a^2} \;;\quad a^2=12 \;;\quad a=\begin{cases}\sqrt{12}\\ \cancel{-\sqrt{12}}\end{cases}$

	0		$\sqrt{12}$		$+\infty$
C'		$-$		$+$	
C		$\searrow$	MIN	$\nearrow$	

Coste Mínimo para $\boxed{a=\sqrt{12}\ m} \longrightarrow b=\frac{6}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{12}}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{12}}{2}\ m}$

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(1+h)^2-1}{\cancel{1}+h-\cancel{1}}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h}-4}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h+h^2}{h}-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-2}{h}=\frac{-2}{0}=\infty.$

f no es derivable en $x=1$ por no ser un límite finito.

La derivabilidad se garantizaría modificando la definición de la función. Por ejemplo serviría: $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x=1\\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1\end{cases}$

(5) $y=ax^3+bx^2+cx+d \longrightarrow y'=3ax^2+2bx+c \longrightarrow y''=6ax+2b$

$P(2,1) \longrightarrow 1=8a+4b+2c+d$

Inflexión en $x=2 \longrightarrow 0=12a+2b$

Tangente Horizontal en $x=2 \longrightarrow 0=12a+4b+c$

$O(0,0) \longrightarrow \boxed{0=d}$

$\begin{cases}8a+4b+2c=1\\ 6a+b=0\\ 12a+4b+c=0\end{cases} \longrightarrow b=-6a$

$\begin{cases}8a-24a+2c=1\\ 12a-24a+c=0\end{cases}$

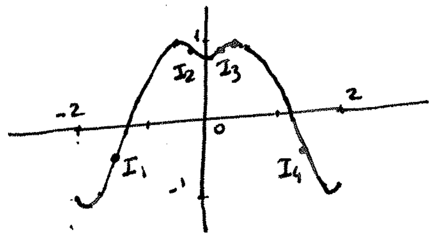
$\begin{cases}-16a+2c=1\\ -12a+c=0\end{cases} \longrightarrow c=12a$

$-16a+24a=1$

$8a=1 \;;\quad \boxed{a=1/8} \longrightarrow \boxed{b=-\frac{6}{8} \quad c=\frac{12}{8}}$

$\boxed{y=\frac{1}{8}(x^3-6x^2+12x)}$

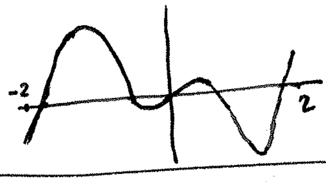
(6) Representamos $y=\operatorname{sen}(x^2+1)$ $\quad -2<x<2$ con la calculadora gráfica observando los siguientes extremos locales:



Mínimos: $(-1'93,-1)$; $(0,0'841)$; $(-1'93,-1)$

Máximos: $(-0'756,1)$; $(0'756,1)$

Se prevén cuatro inflexiones



Representamos $y'=\cos(x^2+1)\cdot 2x$, observando cuatro extremos que se corresponden con las inflexiones de $y=\operatorname{sen}(x^2+1)$: $\boxed{I_1(-1'53,-0'198);\ I_2(-0'443,0'931);\ I_3(1'53,-0'198);\ I_4(0'443,0'931)}$