

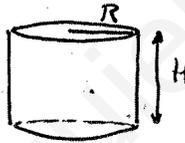
EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

- Halla: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{2x}$
- La recta tangente a la curva $y = 3x - \tan x$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ sea paralela a la recta $y = x - 2$ en uno de sus puntos. Escribe su ecuación.
- Una lata cilíndrica tiene un volumen de 500 cm^3 . La altura de la lata es h cm y el radio de la base es r cm.
 - Halle una expresión para la superficie total A de la lata en función de r .
 - Dado que hay un valor mínimo de A para $r > 0$, halle este valor de r .
- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{Si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{Si } -2 < x \leq 0 \\ a \cos x & \text{Si } x > 0 \end{cases}$
 - Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a .
 - Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a .
 - Para $a = 4$, haz un dibujo aproximado de su gráfica.
- Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.
- Sea $f(x) = x^3 \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
 - Halla el valor de x para el que $f(x)$ tiene un máximo
 - Utiliza la función segunda derivada de $f(x)$ para hallar el valor de x en el que $f(x)$ tiene un punto de inflexión

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{2x} &= \left(\frac{3}{3} \right)^{+\infty} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)} \\
 &= e^{+\infty \cdot 0} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)}{1/2x}} = e^{\frac{0}{0}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x-1) - \ln(3x+4)}{1/2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{3x-1} - \frac{3}{3x+4}}{-\frac{1}{2x^2}}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x+12-9x+3}{(3x-1)(3x+4)} \cdot (-2x^2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-30x^2}{(3x-1)(3x+4)}} \\
 &= e^{-\frac{30}{9}} = \boxed{e^{-\frac{10}{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad y &= 3x - \tan x \rightarrow y' = 3 - (1 + \tan^2 x) = 2 - \tan^2 x \\
 \text{Recta Tangente paralela a } y &= x - 2 \Rightarrow y' = 1 \rightarrow 1 = 2 - \tan^2 x ; \tan^2 x = 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \tan x = \pm 1 \rightarrow \boxed{x = \pi/4} \text{ Única solución para } x \in (0, \pi/2) \\
 x = \pi/4 \rightarrow y &= 3 \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1 \\
 &\rightarrow y' = 1 \\
 y - \left(\frac{3\pi}{4} - 1 \right) &= 1 \cdot (x - \pi/4) \\
 y &= x - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 1 \\
 \boxed{y} &= \boxed{x + \frac{\pi}{2} - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad \text{Minimizar: } A &= 2\pi R^2 + 2\pi R H \\
 \text{Siendo: } \pi R^2 H &= 500 \\
 \rightarrow H &= \frac{500}{\pi R^2} \rightarrow A = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{500}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{1000}{R} \\
 \frac{dA}{dR} &= 4\pi R - \frac{1000}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2}
 \end{aligned}$$



$$\frac{dA}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2} = 0 ; 4\pi R^3 = 1000 ; R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$$

	$\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$
A'	- / +
A	- / +
	M/M

$$\text{Superficie M\u00ednima para } \boxed{R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \text{ cm}}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ a \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$$

a) Los tres trozos de $f(x)$ tienen expresiones continuas, puede estudiar la continuidad en $x = -2$, $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 0 \\
 f(-2) &= (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= 2 \cdot (-2) + 4 = 0
 \end{aligned} \quad \left| \rightarrow f \text{ es continua en } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \cos 0 = 2$$

→ $\boxed{a=4}$ para que f sea continua en $x=0$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{Si } x < -2 \\ 2 & \text{Si } -2 < x < 0 \\ -a \sin x & \text{Si } x > 0 \end{cases}$ Quede estudiar la derivabilidad en $x=-2, x=0$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = 2 \cdot (-2) + 6 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = 2$$

⇒ f es derivable en $x=-2$ $f'(-2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$$

⇒ f no es derivable en $x=0$ para ningún valor de 'a'

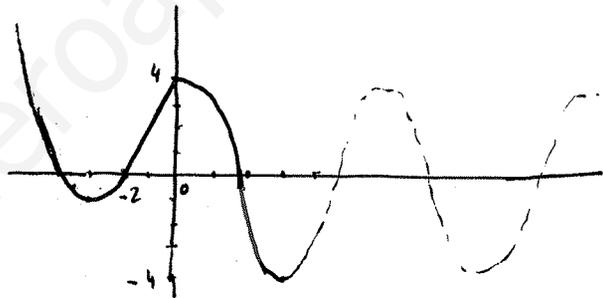
c) • $y = x^2 + 6x + 8$
 $y' = 2x + 6 \rightarrow$ vértice en $x = -3$; $V(-3, -1)$
 $x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} -2 & (-2, 0) \\ -4 & (-4, 0) \end{cases}$

• $y = 2x + 4$

x	y
-2	0
0	4

• $y = 4 \cos x$

x	y
0	4
$\pi/2$	0
π	-4
...	...



⑤ $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

dom $f = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{-\infty} = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1^-$$

→ Asíntota Horizontal $y=1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 - \frac{1}{-1+1} = 1 - \frac{1}{-0} = 1 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 - \frac{1}{-1+1} = 1 - \frac{1}{+0} = 1 - \infty = -\infty$$

→ Asíntota Vertical $x=-1$

$$f'(x) = - \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 0 ; 1 = 0 \text{ Absurdo}$$

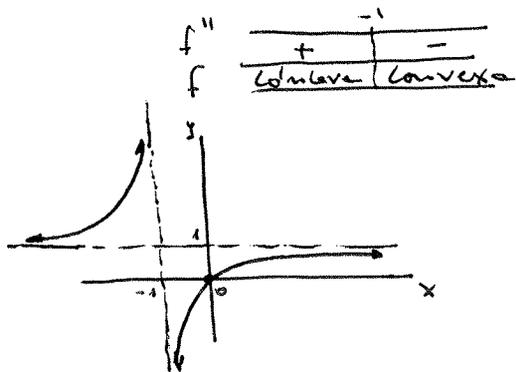
f'	
+	+
-	-
f	

f es creciente en todo su dominio

No tiene extremos locales.

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x+1)^3} = 0 ; -2 = 0 \text{ Absurdo. } \underline{\text{No tiene Inflexiones}}$$



⑥ $f(x) = x^3 \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$

Representando en la calculadora gráfica:

$$f'(x) = 3x^2 \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 (3 \cos x - x \sin x)$$

Representando f' en la calculadora gráfica:

El máximo de f' nos indica la posición del punto de Inflexión de f : $x = 0.823$.

Máximo local: $(1.19, 0.626)$

Punto de Inflexión: $(0.823, 0.379)$

