

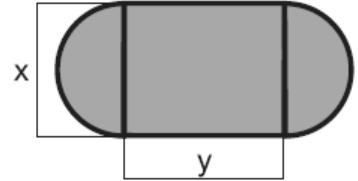
EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\operatorname{sen}x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{mx+n}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ siendo m y n dos

números reales

- Halla razonadamente el dominio de $f(x)$
- Calcula m y n para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio
- Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio

2. Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos como indica la figura. Determine las dimensiones de x e y para que el área encerrada sea máxima.



3. Calcule: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

4. Se considera la función real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ donde a , b y c son números reales. Encuentre los valores de a , b y c para que las rectas tangentes en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ sean paralelas al eje OX , sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX .
5. Consideraremos al neumático de una bicicleta como un cilindro con una longitud fija de 200 cm con sus dos bases unidas. El radio r irá incrementándose conforme vayamos hinchando el neumático incrementando su volumen a una tasa constante de $30 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Halle la tasa de cambio del radio del neumático cuando $r = 2$ cm.
6. Halle el máximo área de un rectángulo con los dos vértices inferiores situados en el eje X y los dos vértices superiores situados sobre la curva $y = \operatorname{sen}x$, para $0 \leq x \leq \pi$.

$$\textcircled{1} f(x) = \begin{cases} 3\ln x - \ln x & \text{Si } x \geq 0 \\ \frac{m \cdot x + n}{1-x} & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

a) $3\ln x - \ln x$ es continua en cualquier $x \in \mathbb{R}$

$\frac{m \cdot x + n}{1-x}$ no estaría definido en $x=1$, pero $1 \geq 0$. Por lo tanto

Tendremos: $\boxed{\text{dom } f = \mathbb{R}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{m \cdot x + n}{1-x} = n$
 $f(0) = 3\ln 0 - \ln 0 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3\ln x - \ln x) = 3$

$\Rightarrow \boxed{n=3}$ para que f sea continua en $x=0$.
 'm' podría tomar cualquier valor.

c) $f'(x) = \begin{cases} 3\ln x + \ln x & \text{Si } x > 0 \\ \frac{n(1-x) - (m \cdot x + n)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{m+n}{(1-x)^2} & \text{Si } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{m+n}{(1-0)^2} = m+n$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3\ln 0 + \ln 0 = 3$

$\Rightarrow \boxed{m+n=3}$

Como la derivabilidad exige la continuidad, deben cumplirse ambas condiciones:

$m=3$ y $m+n=3 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} m=3 \\ n=0 \end{matrix}}$ para que sea derivable en $x=0$

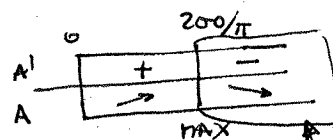
$\textcircled{2}$ Maximizar $A = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi x^2}{4} + xy$

Siendo: $200 = 2\pi \cdot \frac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y \rightarrow y = 100 - \frac{\pi}{2}x$

$A = \frac{\pi x^2}{4} + x \left(100 - \frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi x^2}{4} + 100x - \frac{\pi x^2}{2} = 100x - \frac{\pi x^2}{4}$

$\frac{dA}{dx} = 100 - \frac{\pi}{4} \cdot 2x = 100 - \frac{\pi}{2}x$

$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - \frac{\pi}{2}x = 0 ; x = \frac{200}{\pi}$



Área Máxima para $\boxed{x = \frac{200}{\pi} \text{ m}}$ \rightarrow $\boxed{y = 0 \text{ m}}$

Área Máxima = $\boxed{3183 \text{ m}^2}$

El recinto tendría forma circular.

En realidad, este intervalo no sería posible, ya que sería $y < 0$.

③ a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} \sin x} = \frac{0}{0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \sin x + \sqrt{1+x^2} \cos x} = \frac{1}{0+1 \cdot 1} = \boxed{1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln(1+2\cos x) \cdot \frac{1}{\cos x}} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos x} \ln(1+2\cos x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}} = e^{\frac{\ln 1}{0}} = e^{\frac{0}{0}} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{-2\sin x}{1+2\cos x}}{-\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{1+2\cos x}} = e^{\frac{1}{1}} = \boxed{e}$

④ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a$
 $f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0 ; \quad 4a + b = -12$
 $f'(4) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 4^2 + 2a \cdot 4 + b = 0 ; \quad 8a + b = -48$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 ; \quad x = \frac{-2a}{6} = \frac{-a}{3} \rightarrow y = \left(\frac{-a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + b\frac{-a}{3} + c =$
 $= \frac{-a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c =$
 $= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$

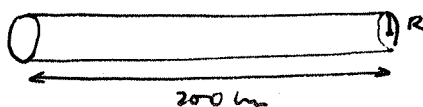
$$\begin{cases} 4a + b = -12 \\ 8a + b = -48 \end{cases}$$

$$4a = -36 \rightarrow \boxed{a = -9} ; \quad 4 \cdot (-9) + b = -12 ; \quad \boxed{b = 24}$$

Que la inflexión se produzca sobre el eje X significa que:

$$\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 ; \quad c = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} = \frac{(-9) \cdot 24}{3} - \frac{2(-9)^3}{27} = \boxed{-18}$$

⑤ $V = \pi R^2 \cdot 200 = 200\pi R^2$



$$\frac{dV}{dt} = 200\pi \cdot 2R \frac{dR}{dt} = 400\pi R \frac{dR}{dt}$$

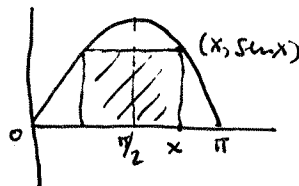
$$\frac{dV}{dt} = 30 \Rightarrow 30 = 400\pi R \frac{dR}{dt} ; \quad \frac{dR}{dt} = \frac{3}{40\pi R}$$

$$R = 2 \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{3}{40\pi \cdot 2} = 0.0119 \text{ cm/seg.}$$

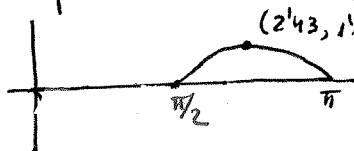
⑥ Base = $2 \cdot (x - \frac{\pi}{2}) = 2x - \pi$

Altura = $\sin x$

Área = $(2x - \pi) \sin x \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$



Representando la función $y = (2x - \pi) \sin x$ con la calculadora gráfica:



Tendremos el máximo valor de área para $x = 2.43$, $\boxed{A_{\max} = 1/2}$