

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{ax} & \text{si } x > 0 \\ bx+c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ con $a, b, c \in \mathfrak{R}$

Determine los valores de a , b y c para que la función sea continua en su dominio, tenga un máximo relativo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ calcule, si existe, la derivada en $x=1$ usando la definición de derivada.
3. De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 metro, halle el volumen del que lo tenga máximo.
4. Dada la función $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$
- a) Indique su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
- b) Realice una representación gráfica aproximada de la misma.
5. Calcule: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$
6. Dibuje aproximadamente la curva $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$, $-4 \leq x \leq 4$ y sobre ella rotule claramente las coordenadas de los puntos máximos / mínimos y de inflexión.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{ax} & \text{si } x > 0 \\ bx+c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x}$ y $bx+c$ son expresiones continuas. Únicamente nos faltaría entonces garantizar la continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c \\ f(0) = c \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c=0} \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f tiene un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \rightarrow b=0$; $b=0$

f tiene en $x=1$ una recta tangente paralela a $y=2x \Rightarrow f'(1)=2 \rightarrow \frac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{1^2}} = 2 ; \sqrt[3]{a} = 6 ; a = 216$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2(1+h)+1) - (2 \cdot 1 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2+2h+1-3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[4(1+h) - (1+h)^2] - (2 \cdot 1 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4+4h-1-2h-h^2-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2-h) = \boxed{2} \end{aligned}$$

Al coincidir ambos límites, la derivada existe: $\boxed{f'(1) = 2}$

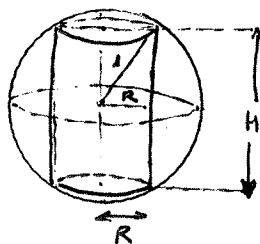
$$\textcircled{3} \quad R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2 = 1 ; 4R^2 + H^2 = 4 ; R^2 = \frac{4-H^2}{4}$$

Maximizar: $V = \pi R^2 H = \pi \frac{4-H^2}{4} \cdot H = \frac{\pi}{4} (4H - H^3)$

$$\frac{dV}{dH} = \frac{\pi}{4} (4 - 3H^2)$$

$$\frac{dV}{dH} = 0 \Rightarrow H = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

V'	$+$	$-$
V	\nearrow	\searrow
	MAX	



Volumen Máximo = $\frac{\pi}{4} \left(4\sqrt{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 \right) = \boxed{2.02 \text{ m}^3}$

④ $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

a) Por un lado $x \neq 0$, y además: $\frac{2}{x}-1 \geq 0$; $\frac{2-x}{x} \geq 0$

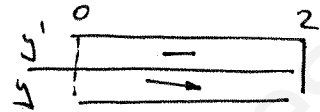
signos $\frac{2-x}{x}$

0	2
-	+
-	-

dominio = (0, 2]

$y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$

$y' = 0 \Rightarrow \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = 0$; $-2 = 0$ Aburrido



La función es decreciente en todo su dominio.

Para facilitar la 2ª derivada, simplificaremos la 1ª:

$y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = \frac{-2}{\sqrt{x^4(\frac{2}{x}-1)}} = \frac{-2}{\sqrt{2x^3-x^4}}$

$y'' = \frac{+2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x^3-x^4}} \cdot (6x^2-4x^3)}{(\sqrt{2x^3-x^4})^2} = \frac{6x^2-4x^3}{(2x^3-x^4)\sqrt{2x^3-x^4}} = \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}}$

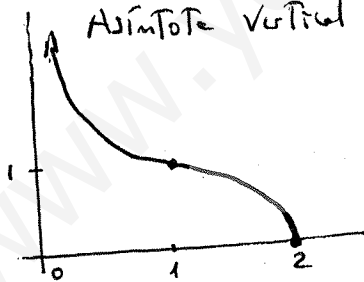
$y'' = 0 \Rightarrow \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}} = 0$; $6-4x = 0$; $x = 3/2$

x	y
0+	+∞
3/2	1/5
2	0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 2\sqrt{+\infty} = +\infty$
Asíntota vertical $x=0^+$

0	3/2	2
+	-	
6 ln crece	6 ln. conv.	
INF		

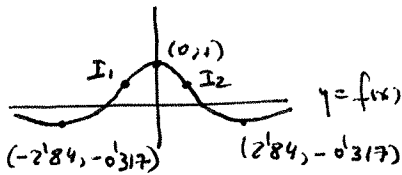
b)



⑤ a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \frac{0}{0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2+x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = +\infty = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = e^{2 \cdot 0} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{1/x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2}}{-1/x^2}} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^2+2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x}} = \boxed{e^2}$

6 Representando $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$ con la calculadora gráfica observamos:



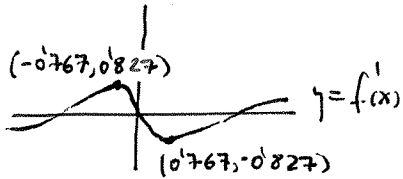
Tenemos:

Maximo Local en $(0, 1)$
Minimos Locales en $(-2.84, -0.317)$
 $(2.84, -0.317)$

Y se prevén dos inflexiones, I_1 e I_2 .

Representando la función derivada:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x^2+1} - \cos x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$



Los extremos locales de $f'(x)$ serán las inflexiones de $f(x)$.

$f(x)$ tiene inflexiones en $(-0.767, 0.571)$
 $(0.767, 0.571)$

www.yoquieroaprobar.es