

Examen de análisis - 2º BACHILLERATO

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+2) \cdot (x-6)}{(x^2-1) \cdot (2x-1)} =$  (1 punto)

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3x}{2x^2+1} \right)^{2x-3} =$  (1 punto)

2. Demuestra que la función dada por  $f(x) = \left| \frac{1}{2+x+1} \right|$  no es derivable en  $x=0$ .  
Ayuda: Comienza rescribiendo  $f(x)$  como una función definida a trozos.

(2 puntos)

3. a) Escribe la definición de derivada de una función en un punto. Después, utilizando la definición, obtén la derivada de la función  $f(x) = \frac{3+x}{-2}$  en el punto  $x_0 = 3$ .

b) Escribe la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva  $y = \frac{3+x}{-2}$  en el punto de abscisa  $x_0 = 3$  (2 puntos)

4. Deriva y simplifica al máximo la derivada:  $y = \ln \left( \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right)$  (1,25 puntos)

5. Demuestra que la función  $f(x) = 2 + 2x - e^x$  corta al eje X en el intervalo  $(-1,1)$  y tiene un máximo relativo en dicho intervalo. Calcula el punto de corte en dicho intervalo aproximando a las décimas.

(2,75 puntos)

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + \dots}{2x^3 + \dots} = \left(\frac{5}{2}\right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2+3x}{2x^2+1} \right)^{2x-3} = 1^\infty ?$$

Se resuelve por el uo e.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x^2+3x}{2x^2+1} - 1 \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x^2+3x-2x^2-1}{2x^2+1} \right)^{2x-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x-1}{2x^2+1} \right)^{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{2x^2+1}{3x-1}} \right)^{\frac{2x^2+1}{3x-1} \cdot \left( \frac{3x-1}{2x^2+1} \cdot 2x-3 \right)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(2x-3)}{2x^2+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-9x-2x+3}{2x^2+1}} = e^{6/2} = e^3$$

2)  $f(x)$  es DERIVABLE en  $x=0$  si es CONTINUA y COINCIDEN LAS DERIVADAS LATERALES en el punto.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x^2+x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Estudio de la continuidad en  $x=0$ .

$$a) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-0}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$b) f(0) = \frac{-0}{0^2+0+1} = 0$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  Es continua en  $x=0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-(x^2+x+1) + x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2-x+2x^2+x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} & \text{Si } x \leq 0 \\ \frac{x(x^2+x+1) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \frac{0^2-1}{(0^2+0+1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f'(0^+) = \frac{-0^2+1}{(0^2+0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Caso  $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f(x)$  No es derivable en  $x=0$

3) a)  $f(x)$  es derivable en el punto  $x=a$  si

existe y es finito el  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+3+h}{3+h-2} - \frac{3+3}{3-2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6+h}{1+h} - 6 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6+h - (6+h)}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h}{h(1+h)}$$

$$= \frac{-5}{1+0} = -5$$

b)  $y - y_0 = \frac{y'}{x_0} (x - x_0)$  Recta tangente

$y - y_0 = \frac{-1}{y_{x_0}} (x - x_0)$  Recta normal

$y(3) = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$  ;  $y'(3) = -5$ . Sustituyendo

$y - 6 = -5(x - 3) \rightarrow y - 6 = -5x + 15$  ;  $y = -5x + 21$  | tangente

$y - 6 = \frac{-1}{-5} (x - 3) \rightarrow y - 6 = \frac{x}{5} - \frac{3}{5}$  ;  $y = \frac{x}{5} + \frac{27}{5}$  | Normal

$$\begin{aligned}
 (4) \quad y' &= \frac{1}{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \\
 &= \frac{\cancel{(1+\cos x)} \cdot (\cancel{\sin x} + \cancel{\sin x} \cos x + \cancel{\sin x} - \cancel{\sin x} \cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)^2} = \frac{2\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \\
 &= \frac{2\sin x}{1^2 - \cos^2 x} = \frac{2\sin x}{1 - \cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}
 \end{aligned}$$

Como  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

(5)  $f(x) = 2 + 2x - e^x$  es una función continua por ser la diferencia de dos funciones continuas (afín y exponencial) en  $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  es continua en  $[-1, 1]$

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= -0,36 < 0 \\ f(1) &= 1,28 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Por el teorema de Bolzano } \exists$$

al menos un  $c \in (-1, 1) \mid f(c) = 0$ .

Vamos a aproximar el  $c$  por el método de Bisección:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 > 0 \\ f(-1) &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } (-1, 0) \rightarrow \left. \begin{aligned} f(-0,5) &= 0,39 > 0 \\ f(-1) &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } (-1, -0,5)$$

$$\left. \begin{aligned} f(-0,75) &= 0,62 > 0 \\ f(-1) &< 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } (-1, -0,75) \quad \left. \begin{aligned} f(-0,875) &= -0,16 < 0 \\ f(-0,75) &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } (-0,875, -0,75)$$

$$\left. \begin{aligned} f(-0,8125) &= -0,068 < 0 \\ f(-0,75) &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } (-0,8125, -0,75) \quad f(-0,8125) =$$

$$\left. \begin{aligned} f(-0,78125) &= -0,02 < 0 \\ f(-0,75) &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como en } I = (-0,78125, -0,75) \text{ es } \\ f(x) \text{ continua y } \left. \begin{aligned} f(-0,78125) &< 0 \\ f(-0,75) &> 0 \end{aligned} \right\}$$

Por Bolzano  $\exists$  al menos un  $c \in I \mid$

$$f(c) = 0 \Rightarrow \boxed{c = -0,7\dots}$$

Para calcular el máximo relativo de la función, voy a ~~calcular~~ calcular los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 2 \rightarrow x_0 = \ln 2$$

$$\boxed{x_0 = \ln 2 \in (-1, 1)} \quad x_0 \text{ es un punto crítico}$$

Para ver si  $x_0$  es Máximo, mínimo o punto de inflexión calculo  $f''(x)$

$$f''(x) = -e^x \text{ que es } \neq 0 \text{ para cualquier valor de } x \Rightarrow$$

$$x_0 = \ln 2$$

$$f(\ln 2) = 2 + 2 \ln 2 - e^{\ln 2} = 2 + 2 \ln 2 - 2 = 2 \ln 2 = \ln 4$$

$M(\ln 2, \ln 4)$  es un MÁXIMO RELATIVO de  $f(x)$