Examen de análisis - 2º BACHILLERATO

Nombre:____

1. Calcula:

   a)$\lim_{\to\infty} \frac{(5\ \ ^2+2)\cdot(x-6)}{(x^2-1)\cdot(2x-1)} =$ (1 punto)

   b)$\lim_{\to\infty} \left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}\right)^{2x-3} =$ (1 punto)

2. Demuestra que la función dada por $f(x) = \left|\frac{}{^2+x+1}\right|$ no es derivable en x=0.
   Ayuda: Comienza rescribiendo f(x) como una función definida a trozos.

   (2 puntos)

3. a)Escribe la definición de derivada de una función en un punto. Después, utilizando la definición, obtén la derivada de la función $f(x) = \frac{3+x}{-2}$ en el punto $x_0 = 3$.
   b)Escribe la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva $y = \frac{3+x}{-2}$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$ (2 puntos)

4. Deriva y simplifica al máximo la derivada: $y = ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)$ (1,25 puntos)

5. Demuestra que la función f$(x) = 2 + 2x - e^x$ corta al eje X en el intervalo (-1,1) y tiene un máximo relativo en dicho intervalo. Calcula el punto de corte en dicho intervalo aproximando a las décimas.

   (2,75 puntos)

① a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+\cdots}{2x^3+\cdots} = \frac{5}{2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}\right)^{2x-3} = 1^{\infty}$?

Se resuelve por el nº e.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2x^2+3x}{2x^2+1}-1\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+3x-2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{2x^2+1}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x^2+1}{3x-1}}\right)^{\frac{2x^2+1}{3x-1}\cdot\left(\frac{3x-1}{2x^2+1}\cdot 2x-3\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(2x-3)}{2x^2+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-9x-2x+3}{2x^2+1}} = e^{6/2} = e^3$$

② $f(x)$ es DERIVABLE en $x=0$ si es CONTINUA y COINCIDEN LAS DERIVADAS LATERALES en el punto.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2+x+1} & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x}{x^2+x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

① Estudio la CONTINUIDAD en $x=0$.

a) $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-0}{1} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

b) $f(0) = \frac{-0}{0^2+0+1} = 0$

c) $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)}$ ⇒ es CONTINUA en $x=0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x^2+x+1)+x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2-x-1+2x^2+x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1(x^2+x+1)-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \frac{0^2-1}{(0^2+0+1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\neq$$

$$f'(0^+) = \frac{-0^2+1}{(0^2+0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ NO ES DERIVABLE en } x=0}$

3) a) $f(x)$ es derivable en el punto $x=a$ si existe o es finito el $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3+3+h}{3+h-2} - \frac{3+3}{3-2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6+h}{1+h} - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6+h-(6+6h)}{h(1+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-5\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)}$$

$$= \frac{-5}{1+0} = -5$$

b) $\boxed{y - y_0 = y'_{x_0}(x - x_0)}$ Recta tangente

$\boxed{y - y_0 = \dfrac{-1}{y'_{x_0}}(x - x_0)}$ Recta normal

$y(3) = \dfrac{3+3}{3-2} = \dfrac{6}{1} = 6$; $y'(3) = -5$. Sustituyendo

$y - 6 = -5(x-3) \rightarrow y - 6 = -5x + 15$; $\boxed{y = -5x + 21}$ tangente

$y - 6 = \dfrac{-1}{-5}(x-3) \rightarrow y - 6 = \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{5}$; $\boxed{y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{27}{5}}$ Normal

(4)

$$y' = \frac{1}{\frac{1-\operatorname{Cos} x}{1+\operatorname{Cos} x}} \cdot \frac{\operatorname{Sen} x\,(1+\operatorname{Cos} x) - (1-\operatorname{Cos} x)(-\operatorname{Sen} x)}{(1+\operatorname{Cos} x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(1+\operatorname{Cos} x)} \cdot (\operatorname{Sen} x + \cancel{\operatorname{Sen} x \operatorname{Cos} x} + \operatorname{Sen} x - \cancel{\operatorname{Sen} x \operatorname{Cos} x})}{(1-\operatorname{Cos} x)(1+\operatorname{Cos} x)^{\cancel{2}}} = \frac{2\operatorname{Sen} x}{(1-\operatorname{Cos} x)(1+\operatorname{Cos} x)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{Sen} x}{1^2 - \operatorname{Cos}^2 x} = \frac{2\operatorname{Sen} x}{1-\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{\cancel{2\operatorname{Sen} x}}{\operatorname{Sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{Sen} x}$$

Como $\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{Sen}^2 x = 1 - \operatorname{Cos}^2 x$

(5) $f(x) = 2+2x-e^x$ es una función CONTINUA por ser la diferencia de dos funciones continuas (AFIN y EXPONENCIAL) en $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ es CONTINUA en $[-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -0'36 < 0 \\ f(1) = 1'28 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Por el TEOREMA DE BOLZANO $\exists$ al menos un $c \in (-1,1) \mid f(c) = 0$.

Vamos a aproximar el c por el <u>método de Bisección</u>:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(-1) < 0 \end{array}\right\} \text{En } (-1,0) \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-0'5) = 0'39 > 0 \\ f(-1) < 0 \end{array}\right\} \text{En } (-1,-0'5)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0'75) = 0'02 > 0 \\ f(-1) < 0 \end{array}\right\} \text{En } (-1,-0'75) \quad \left.\begin{array}{l} f(-0'875) = -0'16 < 0 \\ f(-0'75) > 0 \end{array}\right\} \text{En } (-0'875,-0'75)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0'8125) = -0'068 < 0 \\ f(-0'75) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{En } (-0'8125,-0'75) \quad \cancel{f(-0'8125) =}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0'78125) = -0'02 < 0 \\ f(-0'75) > 0 \end{array}\right\}$$ Como en $I = (-0'78125, -0'75)$ es $f(x)$ CONTINUA y $f(-0'78125) < 0$, $f(-0'75) > 0$

~~Por el Teorema~~ BOLZANO $\exists$ al menos un $c \in I \mid$

$f(c) = 0 \Rightarrow \boxed{c = -0'7\ldots}$

Para calcular el máximo relativo de la función, voy a ~~calcular~~ calcular los puntos críticos.

$f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=2-e^{x_0}=0 \Rightarrow e^{x_0}=2 \rightarrow x_0 \ln e=\ln 2$

$\boxed{x_0=\ln 2 \in (-1,1)}$ x_0 es un punto crítico

Para ver si x_0 es Máximo, mínimo o punto de inflexión calculo $f''(x)$

$f''(x)=-e^x$ que es <0 para cualquier valor de $x \Rightarrow$

$x_0=\ln 2$

$f(\ln 2)=2+2\ln 2-e^{\ln 2} = 2+2\ln 2-2=2\ln 2 = \ln 2^2=\ln 4$

$\boxed{M(\ln 2, \ln 4) \text{ es un MÁXIMO RELATIVO de } f(x)}$