

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Ejercicio n° 1.-

Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3) : (x^2 - 2)$

b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5) : (x + 1)$

Ejercicio n° 2.-

Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

c) $x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

Ejercicio n° 3.-

Calcula el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - 1$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

Ejercicio n° 4.-

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Ejercicio n° 5.-

Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1 \right)$

b) $\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4}$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.-

Halla el cociente y el resto de cada división: Solución:

a) $(4x^3 - 2x^2 + 5x + 3) : (x^2 - 2)$

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \quad | \quad x^2 - 2 \\
 \underline{-4x^3 \quad + 8x} \\
 -2x^2 + 13x + 3 \\
 \underline{2x^2 - 4} \\
 13x - 1
 \end{array}$$

b) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5) : (x + 1)$

Cociente = $4x - 2$

Resto = $13x - 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

	1	-3	2	0	5
-1		-1	4	-6	6
	1	-4	6	-6	11

Cociente = $x^3 - 4x^2 + 6x - 6$

Resto = 11

Ejercicio nº 2.-

Solución:

Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$

a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:

b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

c) $x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	7	7	-15
1		1	8	15
	1	8	15	0
-3		-3	-15	
	1	5	0	

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x - 1)(x + 3)(x + 5)$$

c) Todos los sumandos tienen el factor x^2 . Por tanto, podemos sacar x^2 como factor común:

$$P(x) = x^2(x^3 - x^2 - x - 2)$$

Utilizamos la regla de Ruffini para localizar una raíz entre los divisores de 2.

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

El polinomio de segundo grado resultante, $x^2 + x + 1$, es irreducible. Por tanto, la factorización es:

$$P(x) = x^2(x - 2)(x^2 + x + 1)$$

Ejercicio nº 3.-

Calcula el máx.c.d. y el mín.c.m. de los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 - 1$$

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

Solución:

Los polinomios factorizados son:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)$$

$$Q(x) = (x - 1)^2$$

Por tanto:

$$\text{máx.c.d.} = (x - 1) \quad \text{mín.c.m.} = (x - 1)^2(x + 1)$$

Ejercicio nº 4.-

Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x - 7)} = \frac{x(x - 7)(x + 7)}{x^3(x - 7)} = \frac{x + 7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el máx.c.d. de ambos, que es $x(x-7)$.

Ejercicio nº 5.-

Opera y simplifica:

a) $\frac{2x}{x+1} : \left(\frac{2x}{x+1} - 1 \right)$

b) $\frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4}$

Solución:

a) El paréntesis da prioridad a la resta:

$$\frac{2x}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$$

Efectuamos el cociente:

$$\frac{2x}{x+1} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x-1}$$

b) mín.c.m. $(2x, 3x^2, 6x^4) = 6x^4$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x} - \frac{1-3x}{3x^2} + \frac{2x^2+3}{6x^4} &= \frac{3x^3(x-2)}{6x^4} - \frac{2x^2(1-3x)}{6x^4} + \frac{2x^2+3}{6x^4} = \\ &= \frac{3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 6x^3 + 2x^2 + 3}{6x^4} = \frac{3x^4 + 3}{6x^4} = \frac{3(x^4 + 1)}{6x^4} = \frac{x^4 + 1}{2x^4} \end{aligned}$$