

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Ponencia 1
- Ponencia 2
- Ponencia 3
- Ponencia 4
- Ponencia 5
- Ponencia 6
- Ponencia 7
- Ponencia 8

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Razone si la matriz A es simétrica.

b) Calcule A^{-1} .

c) Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O$

SOCIALES II. 2019 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Una matriz cuadrada es simétrica si se cumple que $A = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Luego no es simétrica.}$$

b) Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O \Rightarrow 2X \cdot A \cdot A^{-1} - A^2 \cdot A^{-1} - 3I_3 \cdot A^{-1} = O \cdot A^{-1} \Rightarrow 2X - A - 3 \cdot A^{-1} = O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X = A + 3 \cdot A^{-1} \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A + 3 \cdot A^{-1})$$

$$X = \frac{1}{2}(A + 3 \cdot A^{-1}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = (-2 \ 2)$$

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúelas cuando sea posible:

$$A + B \cdot C \quad A \cdot C + B \cdot D^t \quad B^2 + C \cdot D \quad A + D \cdot C$$

b) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot (A + I_2) = 3B^t$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(2,2)} + B_{(2,2)} \cdot C_{(2,1)} \Rightarrow$ No se puede, ya que la matriz resultante de $B \cdot C$ es una matriz de orden (2,1) y no se puede sumar con A que es de orden (2,2).

$$A \cdot C + B \cdot D^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 + C \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-2 \ 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_{(2,2)} + D_{(1,2)} \cdot C_{(2,1)} \Rightarrow$ No se puede, ya que la matriz resultante de $D \cdot C$ es una matriz de orden (1,1) y no se puede sumar con A que es de orden (2,2).

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4a-6b & -a+2b \\ 4c-6d & -c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a-6b = 6 \\ -a+2b = -6 \\ 4c-6d = 0 \\ -c+2d = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -12 ; b = -9 ; c = 18 ; d = 12$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^4 X = B^2 + I_2$.

b) ¿Tiene inversa la matriz C ? Justifique la respuesta.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-I) \cdot (-I) = I$$

Luego:

$$A^4 X = B^2 + I_2 \Rightarrow I \cdot X = B^2 + I_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = B^2 + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de la matriz C

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Luego, no tiene inversa ya que su determinante vale 0.

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $A \cdot B - C$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo, calcule $(A \cdot B - C)^{-1}$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = C^t$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCION B

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 8 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

Calculamos la inversa

$$(A \cdot B - C)^{-1} = \frac{\left((A \cdot B - C)^d \right)^t}{|A \cdot B - C|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot B \cdot X - C \cdot X = C^t \Rightarrow (A \cdot B - C) \cdot X = C^t \Rightarrow (A \cdot B - C)^{-1} \cdot (A \cdot B - C) \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot C^t \Rightarrow X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot C^t$$

$$X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifique que la matriz A tiene inversa y calcule A^{-1} .

b) Calcule, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

SOCIALES II. 2019 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION B

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 3 - 6 + 1 - 1 = -12$$

Luego, como el determinante es distinto de 0 si tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}^t}{-12} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica

2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa

b) Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$

SOCIALES II. 2019 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a.1.) Calculamos la matriz $D = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que es simétrica, ya que: $D = D^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Luego, la afirmación es cierta

a.2.) Calculamos la matriz $E = A \cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que no tiene inversa, ya que $|E| = 0$. Luego, la afirmación es falsa

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$B \cdot X + A = C \Rightarrow B \cdot X = C - A \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1}(C - A) \Rightarrow X = B^{-1}(C - A)$$

Calculamos $B^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-6} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X = B^{-1}(C - A) &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 36 \\ 12 & -18 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la inversa de $(A \cdot A^t)$.

b) ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) Calcule, cuando sea posible: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^t \cdot B$, $B \cdot A^t$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A \cdot A^t$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa de $A \cdot A^t$.

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \frac{((A \cdot A^t)^d)^t}{|A \cdot A^t|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}^t}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A^t \cdot A$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 65 + 48 + 48 - 45 - 52 - 64 = 0 \Rightarrow \text{No tiene inversa}$$

c)

$A_{(2,3)} \cdot B_{(2,2)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$$B_{(2,2)} \cdot A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^t_{(3,2)} \cdot B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$B_{(2,2)} \cdot A^t_{(3,2)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2 + m \end{pmatrix}$, siendo m un parámetro real. Se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A ?

b) Para $m = 0$, calcule la matriz inversa de A .

c) Para $m = 0$ en la matriz A , resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2C$, siendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2 + m \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = -2$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y -2 , ya que $|A| \neq 0$

b) Vamos a calcular la inversa de A .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{-4} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$X \cdot A = 2C \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = 2C \cdot A^{-1} \Rightarrow X = 2C \cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X = 2C \cdot A^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Es invertible la matriz $B + 2I_2$? Justifique la respuesta y, en caso afirmativo calcule $(B + 2I_2)^{-1}$

b) Resuelva la ecuación matricial $A^2 + X \cdot B + 2X = 3B^t$.

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $B + 2I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante.

$$|B + 2I_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

Calculamos la inversa de la matriz $B + 2I_2$

$$(B + 2I_2)^{-1} = \frac{((B + 2I_2)^d)^t}{|B + 2I_2|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{aligned} A^2 + X \cdot B + 2X &= 3B^t \Rightarrow X \cdot B + 2X = 3B^t - A^2 \Rightarrow X \cdot (B + 2I) = 3B^t - A^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow X \cdot (B + 2I) \cdot (B + 2I)^{-1} &= (3B^t - A^2) \cdot (B + 2I)^{-1} \Rightarrow X = (3B^t - A^2) \cdot (B + 2I)^{-1} \end{aligned}$$

Calculamos la matriz

$$(3B^t - A^2) = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (3B^t - A^2) \cdot (B + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{8}{3} \\ -3 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule su determinante y el valor o los valores del parámetro m para los que existe la inversa de la matriz A .

b) Para $m = -1$, calcule A^{-1} .

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A + I_3$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 4

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2m^2 + 4 - 4m - 4 + 2m = -2m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = -2 ; m = 1$$

Luego, para $m \neq -2$ y 1 , la matriz A tiene inversa, ya que $|A| \neq 0$.

b) Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X = A + I_3 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot I_3 \Rightarrow X = I_3 + A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X = I_3 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se considera la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X ?

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = A^t \cdot B$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 5

R E S O L U C I Ó N

a) $A_{(3,3)} \cdot X = A^t_{(3,3)} \cdot B_{(3,1)} \Rightarrow$ La matriz X debe ser $(3,1)$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X = A^t \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B$$

Calculamos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot A^t \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Se consideran las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Indique razonadamente cuáles de las siguientes matrices posee inversa, calculando dicha inversa cuando sea posible: $A, B, C \cdot C^t$.

b) Calcule, si existe, una matriz X que satisfaga la ecuación $A \cdot X = D$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 6

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A si tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de 0
Calculamos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-6} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa pues no es cuadrada.

La matriz $C \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

No tiene inversa ya que: $|C \cdot C^t| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 36 - 9 = 0$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X = D \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot D \Rightarrow X = A^{-1} \cdot D$$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1} \cdot D = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga los valores de m y n para que A coincida con su traspuesta y no tenga inversa.

b) Para $m = 0$ y $n = 3$, obtenga A^{-1} .

c) Para $m = 0$ y $n = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2I_3 = A^2$

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 7

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow m = -1$$

$$A \text{ no tiene inversa} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n - 1 - 1 - n - 2 - 1 = 0 \Rightarrow n = 5$$

b) Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} + 2I_3 \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} \Rightarrow X + 2A^{-1} = A \Rightarrow X = A - 2A^{-1}$$

Calculamos la matriz X

$$X = A - 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ m & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determine el valor de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Para $m = 0$, obtenga A^{-1} .

SOCIALES II. 2019 PONENCIA 8

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A \text{ no tiene inversa} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3m + m^2 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = -4$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $m = 1$ y $m = -4$

b) Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{-4} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$