

2º Bachillerato Análisis

Nota: Todos los problemas valen lo mismo

1. Demostrar que la ecuación $x^2 \cdot e^x = 1$ tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$.
Explica razonadamente la demostración y enuncia el teorema que utilices en la demostración.

Existencia de una solución:

Para poder usar Bolzano tendremos que buscar una función igualada a cero. Transformando la ecuación tendremos que es equivalente a $f(x) = x^2 \cdot e^x - 1 = 0$.

Para aplicar Bolzano ha de cumplir dos condiciones:

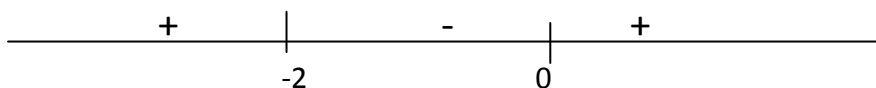
1. Continua en $[0,1]$: lo es al ser producto de función exponencial y polinómica.
2. $f(0) \cdot f(1) < 0$, veamos esta condición $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 1 > 0$. Se cumple

Al cumplir la dos condiciones anteriormente mencionadas existe al menos un valor $c \in (0,1)$ donde se cumple que $f(c) = 0$, y por tanto en $x=c$ se cumple la ecuación $x^2 \cdot e^x = 1$

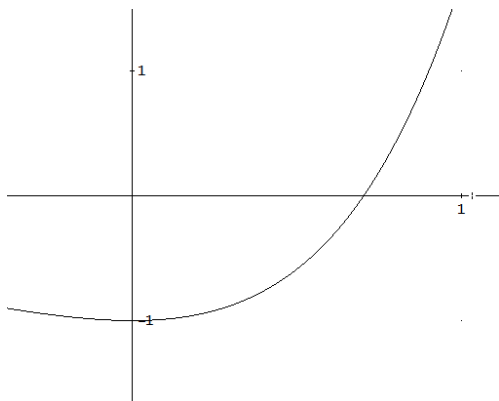
Unicidad de la solución:

Tendremos que ver que entre los puntos $(0,-1)$ y $(1,e-1)$ la función solo crece, para eso estudiemos el signo de $f'(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$. Para esto la igualamos a cero, $f'(x) = 0 \rightarrow$ cuyas soluciones son $x=0$, $x=-2$.

Signo($f'(x)$)



Luego en el intervalo $(0,1)$ $f'(x) > 0$ y la función sólo crece, por tanto no podrá cortar más que una vez:



2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, se pide :

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.

Continuidad:

La función $f(x)$ esta compuesta por dos "trozos": $\frac{\text{sen}(x^2)}{x}$ y $x^2 - 2x$. La primera expresión, $\frac{\text{sen}(x^2)}{x}$, es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, pero en $x=0$ la función no toma valor en esta expresión. La segunda expresión, $x^2 - 2x$, es una función polinómica y por tanto continua y derivable en \mathbb{R} . Por esta razón el único punto que presenta problemas de continuidad y derivabilidad es $x=0$.

Continuidad en $x=0$:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(x^2)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \cos(x^2)}{1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2x = 0 \end{cases} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ función continua en $x=0$ y por tanto en \mathbb{R}

Derivabilidad:

Hagamos la derivada de $f(x)$:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \text{sen}(x^2)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=0$ ha de cumplir: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \text{sen}(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \cos(x^2) - 4x^3 \text{sen}(x^2) - 2x \cos(x^2)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos(x^2) - 4x^2 \text{sen}(x^2) - 2 \cos(x^2)}{2} = 1 \end{aligned}$$

Como ambos límites son diferentes la función no derivable en $x=0$, y será derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

(1) Y (2) Aplicamos L'Hopital porque numerador y denominador continuas y derivable en $x=0$

3. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$ estudiar el crecimiento, los puntos relativos, asíntotas y simetría. Representar la función

Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{Simetría } f(-x) = \frac{3(-x)^2 + 24}{-x + 1} = \frac{3x^2 + 24}{-x + 1} \neq \pm f(x) \text{ no simetría}$$

$$\text{Asíntota vertical } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{27}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 + 24}{x + 1} = \frac{27}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 + 24}{x + 1} = \frac{27}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 24}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 24}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 24}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 24}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x} = -3$$

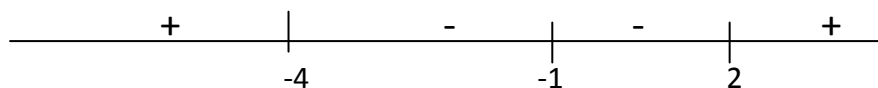
$$y = 3x - 3$$

Monotonía y puntos relativos

$$f'(x) = \frac{6x(x + 1) - (3x^2 + 24)}{(x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 6x - 24}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad 3x^2 + 6x - 24 = 0 \rightarrow x = -4, x = 2$$

Signo($f'(x)$)

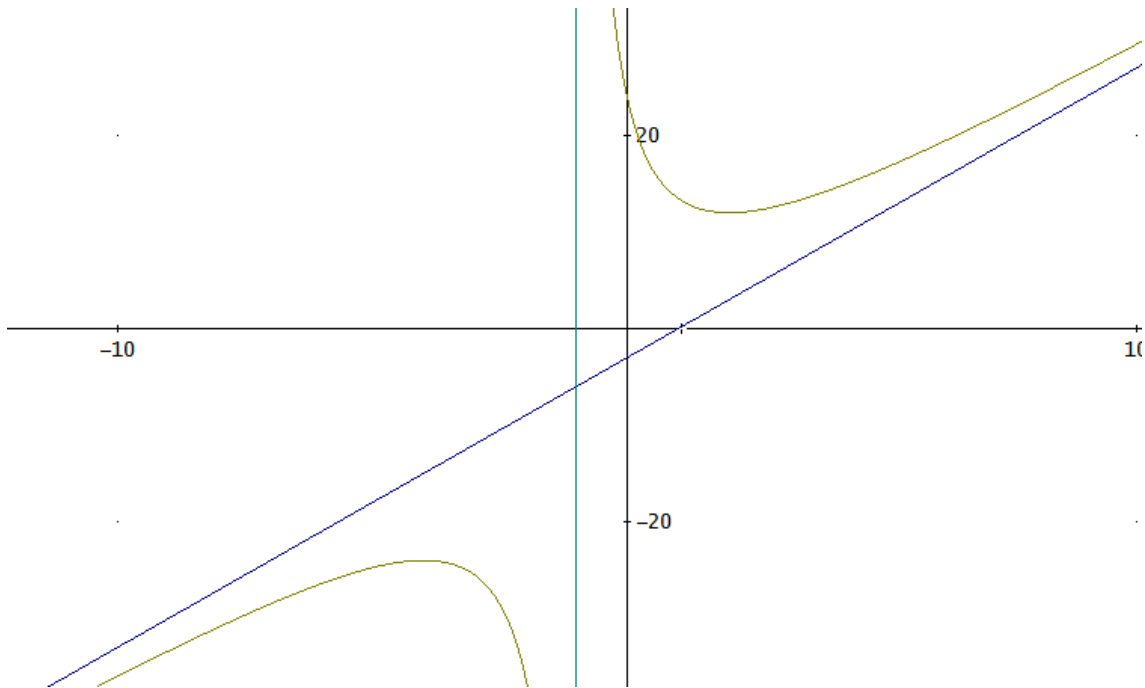


Crecimiento: $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$

Decrecimiento $(-4, 2) - \{-1\}$

Máximo M(-4, -24)

Mínimo (2, 12)



4. a) Calcular el siguiente límite (justifica los pasos) (5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\text{sen}x}$$

b) Calcular la derivadas siguientes: $f(x) = \sqrt{\cos(x)} \cdot 5^{\sqrt{\cos x}}$, $g(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\text{sen}(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

(1) Aplicamos L'Hopital porque numerador y denominador continuas y derivable en $x=0$

b)

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} 5^{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}} (-\text{sen}x) \ln(5) 5^{\sqrt{\cos x}} = -\frac{1}{2} \text{sen}(x) 5^{\sqrt{\cos x}} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} + \ln(5) \right)$$

$$g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) - \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$$