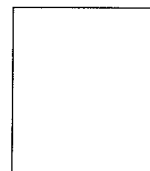




Examen final- 2ª evaluación
2º BACHILLERATO

23-II-18

Nombre: _____ Curso: _____



ACLARACIONES PREVIAS

- No se permite el uso de calculadoras que representen gráficas.
- Para obtener la puntuación máxima del ejercicio hay que hacer y desarrollar debidamente explicadas todas las soluciones.

1. Calcular la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. (1 punto)

2. a) Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius (0.5 puntos)
b) Aplicando el teorema de Rouché Frobenius estudia el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo siempre que sea posible. (1,25 puntos)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

3. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas. (1,25 puntos)
4. Calcular el área encerrada entre las parábolas $y = x^2 - 4x + 13$ e $y = 2x^2 - 8x + 16$. (1 punto)
5. Calcular la primitiva de la función $f(x) = \ln(1 - x^2)$ cuya gráfica pasa por el punto (0.1). (1,5 puntos)
6. Calcule, por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante. (1 punto)

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

7. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a. (1,25 puntos)

$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$

8. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Halla el determinante de $AB^{10}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A. (1,25 puntos)

Examen Final 2ª Evaluación : 2º Bachillerato - 23-II-18

$$1^\circ) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 9 - 21 = -12 \neq 0$ Luego existe matriz inversa.

Calcule la matriz de adjuntos de A.

$$a_{11} = -21 \quad a_{12} = -(-3) = 3 \quad a_{13} = -1$$

$$a_{21} = -0 = 0 \quad a_{22} = 0$$

$$a_{23} = -4$$

$$a_{31} = 9 \quad a_{32} = -3$$

$$a_{33} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^T$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{12} & 0 & -\frac{9}{12} \\ -\frac{3}{12} & 0 & \frac{3}{12} \\ \frac{1}{12} & +\frac{4}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

como $|A| = -24 - 8 - 6 + 18 + 4 + 16 = 0$ y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{Rg A = 2}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 2 - 4 + 12 + 1 + 14 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 3 - 48 + 8 + 8 + 63 = 0$$

$$\boxed{Rg A^* = 2}$$

Cómo $RgA = RgA^* = 2 < 3$ (Nº incógnitas) El sistema es
COMPATIBLE INDETERMINADO con 1 grado de indeterminación.

$$\begin{cases} x + y = 2 - 3z \\ 2x + 3y = 4 - 4z \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2-3z & 1 \\ 1-4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6-9z-1+4z}{1} = \frac{5-5z}{1} = 5-5z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-3z \\ 2 & 1-4z \end{vmatrix}}{1} = \frac{1-4z-4+6z}{1} = \frac{2z-3}{1} = 2z-3$$

$$\begin{cases} x = 5-5z \\ y = 2z-3 \\ z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}$$

Solución

- ③ $x \rightarrow$ Nº de espectadores de la sala A
 $y \rightarrow$ Nº de espectadores de la sala B
 $z \rightarrow$ Nº de espectadores de la sala C.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 720 \\ x + y + z = 200 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{S.C.D}}}$$

Se resuelve por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 720 & 4 & 5 \\ 200 & 1 & 1 \\ 740 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-300}{-3} = 100$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 720 & 5 \\ 1 & 200 & 1 \\ 4 & 740 & 5 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-240}{-3} = 80$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 720 \\ 1 & 1 & 200 \\ 4 & 3 & 740 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-60}{-3} = 20$$

$x = 100$ espectadores
a la sala A

$y = 80$ espectadores
a la sala B

$z = 20$ espectadores
a la sala C

④ $y = x^2 - 4x + 13$

$y = 2x^2 - 8x + 16$

Calcule el corte de ambas: $x^2 - 4x + 13 = 2x^2 - 8x + 16$;

a) $2x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x - 13 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

b) Entre $x=1$ y $x=3$ vea qué parábola queda por encima.

$y_1(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 13 = 4 - 8 + 13 = 9$

$y_2(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 8 - 16 + 16 = 8$

$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) > f_2(x) \end{array} \right.$

c) $\int_1^3 |x^2 - 4x + 13 - 2x^2 + 8x - 16| dx = \int_1^3 |-x^2 + 4x - 3| dx =$

$$= \left| \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right) dx \right| = \left| -\frac{8^3}{3} + 2 \cdot 8^2 - 3 \cdot 8 - \left(-\frac{1}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) \right|$$

$$= \left| -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 \right| = \boxed{\frac{4}{3} u^2 = A}$$

⑤ $f(x) = \ln(1-x^2)$

$$\int \ln(1-x^2) dx = x \ln(1-x^2) - \int \frac{-2x^2}{1-x^2} dx = x \ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2} dx$$

Por partes: $u = \ln(1-x^2) \quad du = \frac{1}{1-x^2} \cdot -2x$

$dv = dx \quad v = x$

$$\int \ln(1-x^2) dx = x \ln(1-x^2) + \underbrace{2 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx}_{I^*}$$

$$I^* = \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad \text{Racional: } I^* = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx$$

$$\frac{\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}+1} \frac{(1-x^2)}{-1}$$

$$I^* = \int -dx + \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$I^{**} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \int \frac{A}{1-x} dx + \int \frac{B}{1+x} dx$$

$$I^{**} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2A \\ A = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

$$I^{**} = \int \frac{1/2}{1-x} dx + \int \frac{1/2}{1+x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x|$$

$$I^* = -x + \frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x|$$

$$\boxed{\int \ln(1-x^2) dx = x \ln(1-x^2) - 2x - \ln|1-x| + \ln|1+x| + C}$$

PRIMITIVA

Como la gráfica de la primitiva pasa por el punto (0,1)

$$0 \cdot \ln(1-0^2) - 2 \cdot 0 - \ln|1-0| + \ln|1+0| + C = 1.$$

$$\boxed{C=1}$$

Así la primitiva buscada será:

$$\boxed{F(x) = x \ln(1-x^2) - 2x - \ln|1-x| + \ln|1+x| + 1}$$

$$\textcircled{b} \left| \begin{array}{ccc} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{array} \right| \xrightarrow{E_3^* = E_1 + E_2 + E_3} \left| \begin{array}{ccc} 2+a & b & 2+a+b+c \\ a & 2+b & 2+a+b+c \\ a & b & 2+a+b+c \end{array} \right|$$

= Extraemos
factor de c_3

$$\xrightarrow{c_3} (2+a+b+c) \left| \begin{array}{ccc} 2+a & b & 1 \\ a & 2+b & 1 \\ a & b & 1 \end{array} \right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} F_2^* = F_2 - F_1 \\ F_3^* = F_3 - F_2 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 2+a & b & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Extraemos} \\ \text{factor en } F_2 \\ \text{y } F_3 \end{array}$$

$$(2+a+b+c) \cdot 2 \cdot 2 \left| \begin{array}{ccc} 2+a & b & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{Desarrolla por } c_3}$$

$$4(2+a+b+c) \cdot 1(-1)^{1+3} \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right| = \boxed{4 \cdot (2+a+b+c)}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a+8 & -2a \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a+8 & -2a \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}$$

Desarrollando por C_1 2.(-1)¹⁺¹

$$\begin{vmatrix} a+8 & -1-2a \\ 4 & -a \end{vmatrix} = 2 \cdot (-a^2 - 8a + 4 + 8a)$$

$$= 2 \cdot (4 - a^2) = 2 \cdot (2+a)(2-a) = 0 \quad \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases} \text{Valores críticos del parámetro}$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \Rightarrow R_f A = R_f A^* = 3 = \text{N}^\circ \text{ de incógnitas}$

Sistema compatible determinado

Si $a=2 \Rightarrow R_f A = R_f \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) = 2$

$$R_f A^* = R_f \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) = 2$$

$C_4 = 0$

$R_f A = R_f A^* = 2 < 3 (\text{N}^\circ \text{ de incógnitas}) \Rightarrow \text{S.E. Indeterm. (1 grado de libertad)}$

$$\rightarrow S: \boxed{a = -2}$$

$$R_g A = R_g \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$R_g A^* = R_g \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{R_g A \neq R_g A^* \Rightarrow \text{Sistema incompatible}}$$

$$8^o) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot B^{10} \cdot A^t} \text{ siendo } A^t \text{ la matriz traspuesta de } A$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ -8 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalizando

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 2^{n-1} & (-2)^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} & (-1)^n \cdot 2^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ siendo } n \in \mathbb{N}$$

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & (-2)^9 & (-1)^9 \\ (-2)^9 & -2^9 & (-1)^9 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 & -512 & -1 \\ -512 & 512 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^{10} \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 512 & -512 & -1 \\ -512 & 512 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 512 & -512 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 512 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{|A \cdot B^{10} \cdot A^t| = 0} \quad \text{Por conter uma fila de } 0$$