PERPENDICULARIDAD

1) Halla la ecuación de la recta r contenida en el plano π, que pasa por el punto A(1,0,-1) y que es perpendicular a la recta s, en cada uno de los casos:

a) $\pi : 2x - 3y + z - 3 = 0, \quad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = \quad 2t \end{cases}$

b) $\pi : 3x + y - z + 3 = 0, \quad s: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$

2) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2,1,-1), B(-1,2,1) y es perpendicular al plano de ecuación x + y + z + 2 = 0

3) Halla el plano π perpendicular al plano π´: x – 2y – 3z + 1 = 0 y que contiene a la recta r: $\begin{cases} 2x - y + 3z \quad = \\ x \qquad - z + 2 = \end{cases}$

4) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,0) y es perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

5) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,0) y es perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$

SOLUCIONES

1) **a)** La recta r se puede calcular como intersección de dos planos, π y π´ (plano perpendicular a la recta s y que contiene al punto P)

π´: $\overrightarrow{n_{\pi''}} = \overrightarrow{d_s} = (-1,1,2)$, A(1,0,-1) →π´: -1(x – 1) + 1(y – 0) + 2(z + 1) = 0 →

π´: x – y –2z – 3 = 0 , $\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{2x - 3y + z - 3 = 0} \\ \mathbf{x - y - 2z - 3 = 0} \end{cases}$

b) Ejercicio análogo al apartado a). Para hallar la dirección de la recta s hallamos el producto vectorial de los vectores perpendiculares a los planos que determinan la recta s.

$$s: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{n_1} = (1,1,-3) \\ \overrightarrow{n_2} = (2,-1,1) \end{matrix} \rightarrow \overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{n_1} x \overrightarrow{n_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2,-7,-3) \rightarrow$$

π´: -2(x – 1) +(-7)(y – 0) + (-3)(z + 1) = 0 →π´: 2x + 7y +3z + 1 = 0 ,

$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} \mathbf{3x + y - z + 3 = 0} \\ \mathbf{2x + 7y + 3z + 1 = 0} \end{cases}$

2) Del plano buscado conocemos dos puntos A(2,1,-1) y B(-1,2,1), un vector director $\overrightarrow{AB}$ = = (-3,1,2) y el otro vector director $\vec{u} = \overrightarrow{n_\pi}´ = (1,1,1)$,luego su ecuación se halla haciendo el

determinante: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{x - 5y + 4z + 7 = 0}$

3) Del plano π conocemos un punto (cualquiera de la recta r), un vector director (el vector director de la recta s) y otro vector director (el vector perpendicular al plano π´). Hallo, primero, las ecuaciones paramétricas de r.

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z \quad = 0 \\ x \qquad - z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3z \\ x = -2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 5t \\ z = \qquad t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r = (-2,-4,0) \\ \overrightarrow{d_r} = (1,5,1) \end{matrix}; \quad \overrightarrow{n_{\pi'}} = (1,-2,-3)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi = \mathbf{13x - 4y + 7z + 10 = 0}$$

4) Del plano pedido conocemos un punto A(1,2,0) y necesitamos su vector perpendicular $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r}$. Para hallar la dirección de la recta r hallamos el producto vectorial de los vectores perpendiculares a los planos que determinan la recta r.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{n_1} = (1,-2,3) \\ \overrightarrow{n_2} = (2,1,-1) \end{matrix} \rightarrow \overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{n_1} x \overrightarrow{n_2} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,7,5)$$

π´: -1(x - 1) + 7(y - 2) + 5(z - 0) = 0 ; **x – 7y – 5z + 13 = 0**

5) Del plano pedido conocemos un punto A(1,2,0) y su vector perpendicular $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r}$ =(-1,2,0) → π : -1(x – 1) + 2(y – 2) = 0 ; **x –2y +3 = 0**

PERPENDICULAR COMÚN Y DISTANCIAS

1) Halla la recta perpendicular común a las rectas r: $\begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - 1 = \dfrac{z - 1}{-1} \\ y = 0 \end{cases}$

2) Distancia entre las rectas r y s del ejercicio anterior.

3) Distancia entre las rectas $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{4}$ y $s: x + 1 = \dfrac{2(y - 3)}{3} = \dfrac{z-1}{2}$

SOLUCIONES

1) Los pasos a seguir son:

a. Posición relativa de r y s

b. vector $\vec{n}$ perpendicular a r y s

c. Plano π que contiene a la recta r y al vector $\vec{n}$

d. Plano π´ que contiene a la recta s y al vector $\vec{n}$

e. La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los plano anteriores.

a) $r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_r}=(0,1,-3); \quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_s}=(1,0,-1)$

$\begin{cases} 0=1+t´ \\ 1+t=0 \\ 2-3t=1-t´ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t´=-1 \\ t=-1 \\ \mathbf{5=2} \end{cases} \rightarrow$ Sistema incompatible, las rectas se cruzan (vectores directores no proporcionales).

b) $\vec{n}=\overrightarrow{d_r}x\overrightarrow{d_s}=(0,1,-3)x(1,0,-1)=\left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)=(-1,-3,-1)$

c) Del plano π conocemos un punto P_r (0,1,2) y los vectores $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 10x-3y-z+5=0$$

d) Del plano π´ conocemos un punto P_s (1,0,1) y los vectores $\overrightarrow{d_s}$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 3x-2y+3z-6=0$$

e) La recta perpendicular común es: $\begin{cases} \mathbf{10x-3y-z+5=0} \\ \mathbf{3x-2y+3z-6=0} \end{cases}$

2) **Primer método:**

Como r y s se cruzan hay que hallar:

a. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s

b. Distancia de r a s es igual a la distancia de un punto de s al plano π.

a) $r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_r}=(0,1,-3); \quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{d_s}=(1,0,-1), \quad P_s=(1,0,1)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi \equiv x+3y+z-5=0$$

b) d (P_s, π) = $\dfrac{|1+0+1-5|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{11}}=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{11}}}{\mathbf{11}}$ **u**

Segundo método: A partir de la recta r´ perpendicular común a r y s tenemos que hallar:

c.Punto A de intersección de r y r´.

d. Punto B de intersección de s y r´.

e.d(r,s) = d(A,B)

a) Resolver el sistema entre r y r´. $r:\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases}$

$$\begin{cases} 10x-3y-z+5=0 \\ 3x-2y+3z-6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 0=0 \\ t=-2/11 \end{matrix} \rightarrow A(0,\frac{9}{11},\frac{28}{11})$$

b) Resolver el sistema entre s y r´. $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$

$$\begin{cases} 10x-3y-z+5=0 \\ 3x-2y+3z-6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t=-14/11 \\ 0=0 \end{matrix} \rightarrow B(\frac{-3}{11},0,\frac{25}{11})$$

c) **d(r,s) =** d(A,B) = $\sqrt{\left(0+\frac{3}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}-0\right)^2+\left(\frac{28}{11}-\frac{25}{11}\right)^2} = \mathbf{\frac{3\sqrt{11}}{11}u}$

3) Primero tenemos que estudiar la posición relativa de r y s, tendremos que resolver el sistema.

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4} \rightarrow \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+3t \\ z=4t \end{cases} \quad y \quad s: x+1=\frac{2(y-3)}{3}=\frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases} ;\rightarrow \begin{cases} -1+2t=-1+t´ \\ 3+3t=3+\frac{3}{2}t´ \\ 4t=1+2t´ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t-t´=0 \\ 2t-t´=0 \\ 4t-2t´=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t´=2t \\ 0=1 \end{matrix} \text{Sistema imcompatible, } \vec{d_r}=(2,3,4), \vec{d_s}=(1,\frac{3}{2},2), \text{proporcionales} \rightarrow r \,//\, s$$

Por lo tanto la distancia de r a s se halla calculando la distancia de un punto de r a la recta s

Para calcular esta distancia hay que hacer:

a. Plano, π, perpendicular a r (y también a s)que pase por un punto de r (P_r).
b. Intersección del plano con la recta s, B
c. d(r,s) = d(P_r, B)

a) $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+3t \\ z=4t \end{cases} \rightarrow P_r=(-1,3,0), \quad \vec{d_r}=(2,3,4)=\vec{n_\pi} \quad y \quad s:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases} \rightarrow \pi \equiv 2(x+1)+3(y-3)+4z=0$

π: 2x + 3y + 4z – 7 = 0

b)

$$\begin{cases} 2x+3y+4z-7=0 \\ x=-1+t \\ y=3+\frac{3}{2}t \\ z=1+2t \end{cases} \rightarrow -2+2t+9+\frac{9}{2}t+4+8t-7=0 \rightarrow 29t+8=0 \rightarrow t=\frac{-8}{29} \rightarrow$$

B=(-37/29,75/29,13/29) **c)** d(r,s) = d(P_r, B) = $\sqrt{\left(-1-\frac{-37}{29}\right)^2+\left(3-\frac{75}{29}\right)^2+\left(-\frac{13}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{321}}{29}u$