1º Trimestre

1.- Dados los vectores $\vec{u} = (1,2)$ y $\vec{v} = (-3,1)$.

a) Comprueba que forman una base de los vectores libres del plano.

b) Encuentra las componentes del vector $\vec{w} = (-1,5)$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

a) Para que dos vectores del plano formen una base de $\mathbb{R}^2$ basta con que no sean paralelos, o lo que es lo mismo, que no sean proporcionales: $\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{1}$, por tanto no son paralelos, y por tanto forman una base $B = \{(1,2),(-3,1)\}$

b) Escribimos el vector $\vec{w} = (-1,5)$ como combinación lineal de los vectores de la base:

$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (-1,5) = \alpha(1,2) + \beta(-3,1)$

Esto nos genera un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -1 = \alpha - 3\beta \\ 5 = 2\alpha + \beta \end{cases}$ cuya solución es: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Por tanto, $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} + \vec{v} = (2,4) + (-3.1) = (-1,5) = \vec{w}$

2.- Sean las recta *r: mx-y=1* y la recta *s: x-my=2m-1*.

a) Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro *m*.

b) Determina m para que ambas rectas se corten en un punto de accisa x=3.

Los vectores directores de r y s son $\vec{r} = (m,-1)$ y $\vec{s}(1,-m)$. Para que las rectas sean paralelas, ha de ocurrir que $\frac{m}{1} = \frac{-1}{-m} \quad \rightarrow \quad -m^2 = -1 \quad \rightarrow \quad m = \pm 1$

Por tanto, si m es 1 ó -1, las rectas son paralelas. Veamos si sin coincidentes o no:

- Si m=1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: x - y - 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases}$, que como vemos son la misma, por tanto son coincidentes.
- Si m=-1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: -x - y - 1 = 0 \\ s: x + y + 3 = 0 \end{cases}$, que como podemos observar no son la misma, por tanto las rectas son paralelas no coindicentes.

En el caso de que m no sea ni 1 ni -1, las rectas son secantes. Veamos el caso en el que ambas son perpendiculares:

Para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que el producto escalar de los dos vectores directores sea nulo:

r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m,-1)\cdot(1,-m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m + m = 0 \quad \rightarrow \quad 2m = 0$

Por tanto para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que m=0.

- Si m≠1 y m≠-1, las rectas son secantes.
- Si m=0, las rectas son perpendiculares.

Si ambas rectas se cortan en un punto con x=3, tenemos que el punto de corte será (3,y), por tanto, si sustituimos en ambas rectas:

$$\begin{cases} r: 3m - y - 1 = 0 \\ s: 3 - my + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

despejando y de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} y = 3m - 1 \\ 3 - m(3m-1) + 1 - 2m = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3 - 3m^2 + m + 1 - 2m = 0 \quad \rightarrow \quad -3m^2 - m + 4 = 0$$

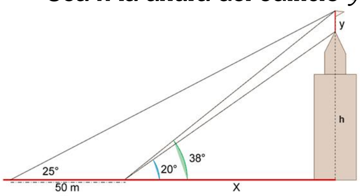
Resolviendo la ecuación de segundo grado en m, obtenemos:

$$3m^2 + m - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Si m=1, como son coincidentes, es claro que se cortan en un punto de abscisa 3, y para el otro caso, son secantes en el punto de abscisa 3.

3.- En el tejado de una casa hay una antena. Desde un punto del suelo se ven la casa y la antena bajo ángulos de 20° y 38° respectivamente. 50 metros más atrás, la antena se ve bajo un ángulo de 25°. Calcula la longitud de la antena.

Sea h la altura del edificio y la antena, aplicando tangentes en los dos triángulos tenemos:



$$\left.\begin{aligned} \tan 38 = \frac{h}{x} \quad &\rightarrow \quad h = x \cdot \tan 38 \\ \tan 25 = \frac{h}{x+50} \quad &\rightarrow \quad h = \tan 25 \cdot (x + 50) \end{aligned}\right\}$$

igualando: $x \tan 38 = \tan 25(x+50)$

Operando:

$$x \tan 38 - x \tan 25 = 50 \tan 25 \quad \rightarrow \quad x = \frac{50 \tan 25}{\tan 38 - \tan 25} = 74{,}02\ m$$

Y de aquí, la altura de la torre y la antena h es: $h = x \cdot \tan 38 = 57{,}83\ m$

Para calcular la altura de la antena, calcularemos antes la altura del edificio h':

$$\tan 20 = \frac{h'}{x} \quad \rightarrow \quad h' = x \cdot \tan 20 = 74{,}02 \cdot \tan 20 = 26{,}94\ m$$

Por tanto, la altura de la antena y, la calculamos haciendo la diferencia de las dos alturas:

$$y = h - h' = 57{,}83 - 26{,}94 = 30{,}89\ \text{m}$$

4.-

a) Expresa $\cos(3\alpha)$ en función de $\cos\alpha$

Descomponiendo $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$ y desarrollando como el coseno de una suma:

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - sen\alpha \cdot sen 2\alpha\ ,$$

Utilizando las razones trigonométricas de los ángulos dobles:

$$= \cos\alpha \cdot \left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right) - sen\alpha \cdot 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha = \cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot sen^2\alpha - 2sen^2\alpha \cdot \cos\alpha$$

Hacemos el cambio $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha \cdot \left(1 - \cos^2\alpha\right) - 2 \cdot \left(1 - \cos^2\alpha\right) \cdot \cos\alpha = \cos^3 - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

Agrupando, llegamos a:

$$= 4\cos^3 - 3\cos\alpha = \cos(3\alpha)$$

b) El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale 12/13, calcula $sen(180+\alpha)$

Como $sen(180+\alpha) = -sen\alpha$, entonces calculamos el seno utilizando la identidad fundamental de la trigonometría y por tanto: tenemos que $sen(180+\alpha) = -\dfrac{5}{13}$

5.-

a) Resuelve la ecuación $2\cdot sen(2x) = \sqrt{2}$

Si pasamos el 2 a la derecha: $sen(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Los ángulos cuyo seno es $+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ son $\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$, despejando x tenemos: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

O lo que es lo mismo en grados sexagesimales:

$$x_1 = 22°30' + 180k = \frac{\pi}{8} + k\pi \qquad x_2 = 67°30' + 180k = \frac{3\pi}{8} + k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

b) Simplifica la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{2\cdot\cos(45+\beta)\cdot\cos(45-\beta)}{\cos(2\beta)}$

Utilizando las fórmulas del coseno del ángulo suma, del ángulo diferencia y del ángulo doble:

$$\cos(A+B) = \cos A\cdot\cos B - SenA\cdot SenB$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cdot\cos B + SenA\cdot senB$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A$$

Tenemos:

$$\frac{2\cdot\cos(45+\beta)\cdot\cos(45-\beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{2(\cos 45\cdot\cos\beta - sen45\cdot sen\beta)\cdot((\cos 45\cdot\cos\beta + sen45\cdot sen\beta))}{\cos^2\beta - sen^2\beta}$$

Operando, llegamos a:

$$= \frac{2(\cos 45\cdot\cos\beta - sen45\cdot sen\beta)\cdot(\cos 45\cdot\cos\beta + sen45\cdot sen\beta)}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2\frac{\cos^2 45\cdot\cos^2\beta - sen^2 45\cdot sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta}$$

Sustituyendo el seno de 45 y el coseno de 45 por su valor, tenemos:

$$= 2\frac{\cos^2 45\cdot\cos^2\beta - sen^2 45\cdot sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2\frac{\frac{1}{2}\cos^2\beta - \frac{1}{2}sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\beta - sen^2\beta}{\cos^2\beta - sen^2\beta} = 1$$

2º Trimestre

6.-

a) Halla las soluciones de la ecuación: $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

b) Encuentra la ecuación que tiene por raíces 2, -3, i y –i.

$a)\ Z_1 = 2_0; Z_2 = 2_{120}; Z_3 = 2_{240}; Z_4 = 1_{60}; Z_5 = 1_{180}; Z_6 = 1_{300}$ $\quad b)\ z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$

7.-

a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, Z, y el opuesto del conjugado del mismo número?. Razona la respuesta.

b) Calcula los números x e y de modo que: $\dfrac{3 - xi}{1 + 2i} = y + 2i$

a) Iguales $\quad b)\ x = -16 \quad y = 7$

8.- Halla la longitud de los lados y del área del cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de la ecuación $z^4+16=0$

$l = 2\sqrt{2} \qquad A = 8\ u.a.$

9.- La circunferencia C pasa por el punto A(4,0) y es tangente a la recta y=x en el punto B(4,4).

a) Determina la ecuación de la recta que pasa por B y por el centro de la circunferencia C.

b) Encuentra el centro C y calcula su radio. (2 puntos)

$a)\ x + y - 8 = 0 \qquad b)\ C(6,2) \qquad r = 2\sqrt{2}$

10.- Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices A(1,6), B(-4,-4) y C(4,0)

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

3º Trimestre

11.-

a) Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 Kg. Esas latas de tomate se venden a 1; 1,80 y 3,30 €, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 Kg y nos cuestan 35,60 €. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

Sol: 8 latas de A, 8 latas de B y 4 latas de C

b) Resuelve la siguiente ecuación: $\log_2(x-5) - \log_2(x-6) = 3 - \log_2(2x-10)$

X=7

12.- Calcula a y b sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{a}{x} + bx & si \quad x > 2 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio.

Sol: a=-20; b=-5

13.- **a)** Diga cuando un punto $(x_o, f(x_o))$ es de inflexión para una función de f(x).

b) Calcule los coeficientes a y b del polinomio $p(x)=ax^3-3x^2+bx+1$, para que su gráfica pase por el punto (1,1), teniendo aquí un punto de inflexión.
c) Diga, razonadamente, si en el punto (1,1) la función es creciente o decreciente.

Sol: b) a=1; b=2; c) Decreciente.

14.-

a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

La **regla de la cadena** afirma que si f es derivable en x y g es una función derivable en f(x), entonces la función compuesta $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ es derivable en x y su derivada vale:

$$(g\circ f)'(x)=\frac{d(g\circ f)}{dx}=\frac{dg(f(x))}{dx}=\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))\cdot g'(x)$$

b) Calcule y simplifique en lo posible, la derivada de la función:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+cosx}\right)\quad\rightarrow\quad f'(x)=2\cdot\text{cosec}(x)$$