1 y 2 Números reales. Operaciones. Ordenación

1. Se quiere calcular el radio de varias bolas de acero, para lo cual se van sumergiendo en un recipiente graduado y lleno de agua para obtener, de esta forma, sus respectivos volúmenes. Completa, redondeando a dos cifras decimales, la siguiente tabla, en la que vienen expresadas las medidas halladas:

Volumen (cm^3)	12,5	20,3	95	225
Radio (cm)				

2. Simplifica el valor de la siguiente expresión: $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}}{\sqrt{32} - \sqrt{18}}}$

3. Llamamos metro a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre. Con ayuda de esta definición, calcula el radio de la Tierra en el supuesto de que esta fuera una esfera perfecta.

4. El Ayuntamiento de Loma del Pastor, cuyo municipio cuenta con 600 habitantes de edad comprendida entre dieciséis y veinte años, realiza una encuesta sobre las actividades deportivas que interesan a dicho segmento de población. Sabiendo que el 81,818181... % contestó que no le interesaba el ciclismo y que el 14,583333... % contestó que le interesaba la natación, averigua el número de jóvenes que respondieron a la encuesta.

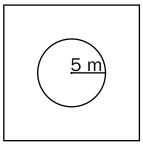
5. Escribe el número irracional $\sqrt{21 + 6\sqrt{12}}$ como un número del tipo $n + \sqrt{m}$, donde n y m son números enteros.

6. Demuestra que el número $\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}$ es entero.

7. Encuentra los valores reales de x que verifican simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 6(x + 1) + \dfrac{23}{5} > 4x + \dfrac{68}{5} \\ \dfrac{3 + 8(x + 1)}{2} < 2x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

8. Se quiere rodear de césped artificial una piscina de forma circular con 5 m de radio mediante un jardín de forma cuadrada, tal y como muestra la figura. Se sabe que el metro cuadrado de césped cuesta 5 euros. ¿Cuánto deberá medir el lado del cuadrado de manera que el coste no supere los 1 500 euros?



9. a) Partiendo de la desigualdad $(x - y)^2 > 0$, demuestra que si x e y son dos números positivos distintos, entonces $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} > 2$.

b) Demuestra que si a, b y c son números positivos distintos, entonces se verifica la siguiente desigualdad: $(a + b + c) \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) > 9$

10. Demuestra que al sustituir cualquier número natural n en la expresión $5^n - 1$ se obtiene como resultado un múltiplo de 4.

11. Demuestra que al sustituir cualquier número natural n en la expresión $3n^2 + n - 2$ se obtiene un número par.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$

Por tanto:

Volumen (cm³)	12,5	20,3	95	225
Radio (cm)	1,44	1,69	2,83	3,77

2. $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8} + 3\sqrt{128}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}} = \sqrt[3]{\dfrac{15 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2^3\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{30\sqrt{2} + 24\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{54\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

3. $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cuadrante} = 10^7 \text{ m} \\ 4 \text{ cuadrantes} = 4 \cdot 10^7 \text{ m} \end{array}\right\}$

Longitud del meridiano $= 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot 10^7$

$r = \dfrac{4 \cdot 10^7}{2 \cdot \pi} \approx 6\,366\,000 \text{ m} = 6\,366 \text{ km}$

4. Si calculamos las fracciones correspondientes a los números racionales 81,818181... y 14,583333..., deducimos:

$\left.\begin{array}{l} 81{,}818181\ldots \% \text{ de } n \text{ es } \dfrac{900}{11} \cdot \dfrac{n}{100} = \dfrac{9n}{11} \\ 14{,}583333\ldots \% \text{ de } n \text{ es } \dfrac{174}{12} \cdot \dfrac{n}{100} = \dfrac{7n}{48} \end{array}\right\}$

n debe ser múltiplo de $11 \cdot 48 = 528$.

Como el número total de jóvenes es 600, deducimos que contestaron a la encuesta 528 de ellos.

5. $\sqrt{21 + 6\sqrt{12}} = \sqrt{9 + 12 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{12}} =$

$= \sqrt{(3 + \sqrt{12})^2} = 3 + \sqrt{12}$

6. $\left(\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}}\right)^2 =$

$= 20 + 2\sqrt{19} + 20 - 2\sqrt{19} -$

$- 2\sqrt{(20 + 2\sqrt{19}) \cdot (20 - 2\sqrt{19})} =$

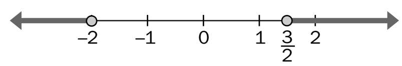
$= 40 - 2\sqrt{400 - 76} = 40 - 36 = 4$

Por tanto:

$\sqrt{20 + 2\sqrt{19}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{19}} = 2$

7. $\begin{cases} 30x + 30 + 23 > 20x + 68 \\ 3 + 8x + 8 < 4x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x > 15 \\ 4x < -8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x < -2 \end{cases}$



8. Supongamos que el lado del cuadrado mide x metros.

$5 \cdot (x^2 - 25\pi) < 1\,500 \Rightarrow x < 19{,}45 \text{ m}$

9. a) $(x - y)^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2}{xy} > 2 \Rightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} > 2$

b) $(a + b + c) \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) =$

$= \dfrac{a}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{c} =$

$= 1 + 1 + 1 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} >$

$> 3 + 2 + 2 + 2 = 9$ aplicando el apartado a.

10. Aplicamos el principio de inducción completa:

1. Para $n = 1$ se verifica:
   $5^1 - 1 = 4$ es múltiplo de 4.
2. Supongamos la propiedad cierta para $n - 1$:
   $5^{n-1} - 1$ es múltiplo de 4.

   Debemos comprobarla para n:
   $5^n - 1 = 5 \cdot 5^{n-1} - 1 - 4 + 4 = 5(5^{n-1} - 1) + 4$

   Como los dos sumandos de la última expresión son múltiplos de 4, resulta que $5^n - 1$ es múltiplo de 4.

11. Aplicamos el principio de inducción completa:

1. Para $n = 1$ se verifica: $3 + 1 - 2 = 2$ es par.
2. Supongamos la propiedad cierta para $n - 1$:

   $3(n - 1)^2 + (n - 1) - 2$ es par.

   Debemos comprobarla para n. Para ello:

   Desarrollamos la expresión anterior y resulta:

   $3(n - 1)^2 + (n - 1) - 2 = 3n^2 - 5n$

   Por tanto:

   $3n^2 + n - 2 = 3n^2 - 5n + 5n + n - 2 =$

   $= (3n^2 - 5n) + 6n - 2$

   $3n^2 + n - 2 = (3n^2 - 5n) + 2(3n - 1)$

   Como los dos sumandos de la última expresión son múltiplos de 2, resulta que $3n^2 + n - 2$ es par.

www.yoquieroaprobar.es

3 Expresiones algebraicas

www.yoquieroaprobar.es

1. a) Demuestra que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

b) Simplifica todo lo que puedas la fracción algebraica $R(x) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$.

2. Saca dos veces factor común en las siguientes expresiones:

a) $xy - zy + xa - za$ b) $2xa + ya - 2xb - yb$ c) $2xa - 4xb - 3ya + 6yb$

3. Recuerda las expresiones algebraicas que establecen el cuadrado de la suma y el cuadrado de la diferencia, para factorizar los siguientes polinomios:

a) $9x^2 - 12x + 4$ b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ c) $4x^4 - 16x^2y + 16y^2$

4. Recuerda la expresión algebraica que establece la diferencia de dos cuadrados como el producto de una suma por una diferencia, para factorizar los siguientes polinomios:

a) $9x^2 - 4y^2$ b) $12 - 3x^2$ c) $a^2 - (b + c)^2$ d) $4x^2 - 9y^4$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^2 + y^2 + 2xy - z^2$ b) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 12yz$ c) $4 - 9x^2 - 25y^2 + 30xy$

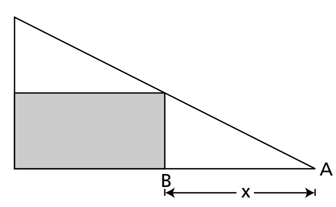
6. Calcula el valor de k para que al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{3 + \dfrac{x - 9}{x - 1}}{k - \dfrac{x + 1}{x - 1}}$ resulte un polinomio de primer grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.

7. Se considera un rectángulo de base 20 metros y de altura 12 metros.

a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base del dado en x metros y al disminuir su altura en y metros.

b) Calcula el valor numérico de la expresión anterior para $x = 2$ e $y = 4$.

8. Un rectángulo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo de catetos 12 y 20 cm tal y como muestra la figura.



a) Escribe la expresión algebraica que determina el área del rectángulo suponiendo que la distancia entre los puntos A y B es de x centímetros.

b) Calcula los valores numéricos de la expresión anterior para $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.

9. Calcula la expresión del polinomio de segundo grado P(x) sabiendo que $P(x + 2) = 2x^2 + 5x + 7$.

10. Calcula los valores de a y de b para que el polinomio $4x^3 + 4x^2 + ax + b$ sea divisible por $2x^2 - x - 1$. Escribe el cociente de la división.

11. Dado el polinomio $p(x) = (x + 1)^2 - Ax$ y la fracción algebraica $R(x) = \dfrac{x^3}{1 - x}$, calcula el valor de A para que se verifique la igualdad $p(x) + R(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIONES

1. a) Multiplicando los polinomios:

$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$
$= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$

b) Aplicando la expresión anterior:

$$R(x) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x - y)\cdot(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

2. a) $xy - zy + xa - za = y(x - z) + a(x - z) =$
$= (x - z)(y + a)$

b) $2xa + ya - 2xb - yb = a(2x + y) - b(2x + y) =$
$= (2x + y)(a - b)$

c) $2xa - 4xb - 3ya + 6yb = 2x(a - 2b) - 3y(a - 2b) =$
$= (a - 2b)(2x - 3y)$

3. a) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

c) $4x^4 - 16x^2y + 16y^2 = (2x^2 - 4y)^2$

4. a) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 =$
$= (3x - 2y) \cdot (3x + 2y)$

b) $12 - 3x^2 = 3 \cdot (4 - x^2) = 3 \cdot (2^2 - x^2) =$
$= 3(2 - x)(2 + x)$

c) $a^2 - (b + c)^2 = (a - (b + c)) \cdot (a + (b + c)) =$
$= (a - b - c)(a + b + c)$

d) $4x^2 - 9y^4 = (2x)^2 - (3y^2)^2 = (2x - 3y^2) \cdot (2x + 3y^2)$

5. a) $x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = (x + y)^2 - z^2 =$
$= (x + y - z) \cdot (x + y + z)$

b) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 12yz = (2x)^2 - (9y^2 + 4z^2 - 12yz) =$
$= (2x)^2 - (3y - 2z)^2 = (2x + 3y - 2z) \cdot (2x - 3y + 2z)$

c) $4 - 9x^2 - 25y^2 + 30xy = 2^2 - (3x - 5y)^2 =$
$= (2 - 3x + 5y) \cdot (2 + 3x - 5y)$

6.
$$\frac{3 + \dfrac{x - 9}{x - 1}}{k - \dfrac{x + 1}{x - 1}} = \frac{\dfrac{3x - 3 + x - 9}{x - 1}}{\dfrac{kx - k - x - 1}{x - 1}} =$$

$$= \frac{(4x - 12)\cdot(x - 1)}{((k - 1)x - (k + 1))\cdot(x - 1)} = \frac{4x - 12}{(k - 1)x - (k + 1)}$$

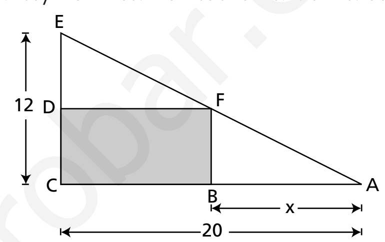
El denominador debe ser constante. Por tanto: $k = 1$ y el polinomio será: $\dfrac{4x - 12}{-2} = -2x + 6$

7. a) Las medidas del nuevo rectángulo son $20 + x$ y $12 - y$. Por lo tanto, su área se puede escribir como: $S = (20 + x) \cdot (12 - y)$

b) Para los valores indicados:

$$S(x = 2, y = 4) = 22 \cdot 8 = 176 \text{ m}^2$$

8. a) Los triángulos ABF y ACE son semejantes y, por tanto, verifican el teorema de Tales:



$$\frac{x}{FB} = \frac{20}{12} \Rightarrow FB = \frac{3x}{5}$$

El área del rectángulo será:

$$S = (20 - x) \cdot \frac{3x}{5} = \frac{60x - 3x^2}{5}$$

b) $S(2) = \dfrac{120 - 12}{5} = 21{,}6 \text{ cm}^2$

$S(5) = \dfrac{300 - 75}{5} = 45 \text{ cm}^2$

$S(10) = \dfrac{600 - 300}{5} = 60 \text{ cm}^2$

9. $P(x + 2) = 2x^2 + 5x + 7 =$
$= 2(x + 2)^2 - 8 - 8x + 5(x + 2) - 10 + 7 =$
$= 2(x + 2)^2 - 8 - 8(x + 2) + 16 + 5(x + 2) - 10 + 7 =$
$= 2(x + 2)^2 - 3(x + 2) + 5$

Por tanto: $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$

10. Cociente: $2x + 3$. Resto: $(a + 5)x + (b + 3) = 0$

$$\begin{cases} a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5 \\ b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

11. $p(x) + R(x) = \dfrac{(A - 1)x^2 + (1 - A)x + 1}{1 - x}$

Para $A = 1$ $\quad p(x) + R(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

www.yoquieroaprobar.es

4 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $$\frac{\dfrac{2+x}{2-x}+\dfrac{2-x}{2+x}}{1-\dfrac{2-x}{2+x}}=5$$

b) $$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3+a^2}{1+3a^2}$$

2. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$.

a) Demuestra que la suma de sus dos raíces es igual a $-\dfrac{b}{a}$

b) Demuestra que el producto de sus dos raíces es igual a $\dfrac{c}{a}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

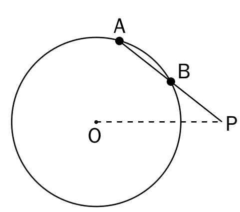
a) $$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{2}$$

b) $$\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{2rx-x^2}=r$$

4. Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x-2}=352$

5. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $5\log x-\log 288=3\log\dfrac{x}{2}$

6. La circunferencia de la figura tiene 16 cm de radio y el punto P está situado a 24 cm del centro O. La secante PA corta a la circunferencia de tal forma que las distancias PB y BA coinciden. Calcula la longitud del segmento de extremos P y A.



7. Dos grifos juntos llenan una bañera en 12 minutos. Calcula el tiempo que tardaría en llenar la bañera cada uno de los grifos por separado si se sabe que uno de ellos emplearía 10 minutos menos que el otro.

8. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$$

9. Comprueba que las expresiones $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, $z=u^2+v^2$, siendo u y v cualquier pareja de números enteros, forman una solución de la ecuación $x^2+y^2=z^2$. ¿Cómo será el triángulo formado por segmentos que midan estos números? A cualquier terna de números enteros que verifican esta ecuación se la denomina terna de números pitagóricos.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{\dfrac{2x^2+8}{(2-x)(2+x)}}{\dfrac{2x}{2+x}} = 5 \Rightarrow \dfrac{2x^2+8}{2x(2-x)} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x^2 - 20x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = \dfrac{2}{3}$

b) $x^2 + 3a^2x^2 + x + 3a^2x + 1 + 3a^2 =$
$= 3x^2 + a^2x^2 - 3x - a^2x + 3 + a^2$
$2(a^2 - 1)x^2 + 4(a^2 + 1)x + 2(a^2 - 1) = 0$
$(a^2 - 1)x^2 + 2(a^2 + 1)x + (a^2 - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{1-a}{a+1},\ x = \dfrac{a+1}{1-a}$

2. a) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$
$= \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

b) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$
$= \dfrac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

3. a) $2x + 2\sqrt{x^2-4} = x^2 - x\sqrt{x^2-4}$

$\sqrt{x^2-4} = \dfrac{x^2-2x}{x+2} \Rightarrow x^2 - 4 = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 4x^3}{x^2+4x+4}$

$2x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(2x^2+3x+2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ no tiene solución real} \end{cases}$

b) $\sqrt{r^2 - x^2} = r - \sqrt{2rx - x^2}$

$r^2 - x^2 = r^2 + 2rx - x^2 - 2r\sqrt{2rx - x^2}$

$\sqrt{2rx - x^2} = x \Rightarrow 2rx - x^2 = x^2$

$x^2 - rx = 0 \Rightarrow x(x - r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = r \end{cases}$

4. $3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x + \dfrac{1}{9} \cdot 3^x = 352 \Rightarrow$

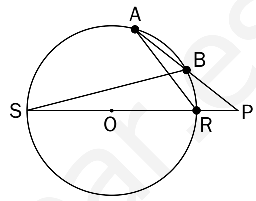
$\Rightarrow \dfrac{352}{9} \cdot 3^x = 352 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$

5. $\log \dfrac{x^5}{288} = \log \dfrac{x^3}{8} \Rightarrow \dfrac{x^5}{288} = \dfrac{x^3}{8} \Rightarrow x^5 - 36x^3 = 0$

$\Rightarrow x = 0,\ x = 6,\ x = -6$

$x = 0$ y $x = -6$ no son solución del problema.

6.



Los triángulos PAR y PSB son semejantes, ya que tienen un ángulo común P y los ángulos en A y en S son iguales, por abarcar el mismo arco en la circunferencia.

Escribimos una ecuación con la incógnita PB.

$\dfrac{PB}{PS} = \dfrac{PR}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PR \cdot PS \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot PB^2 = (24 - 16) \cdot (24 + 16) = 320 \Rightarrow$

$\Rightarrow PB = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ cm

$PA = 2 \cdot PB = 8\sqrt{10}$ cm

7. Si se supone que el primer grifo tarda x minutos en llenar la bañera y que el segundo tarda $x - 10$:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-10} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow x^2 - 34x + 120 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = 4 \text{ solución sin sentido} \end{cases}$

El primer grifo tardaría 30 minutos y el segundo tardaría 20 minutos.

8. Transformamos el sistema en un sistema triangular equivalente:

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0z = -12 \end{cases}$

La última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

9. $\begin{cases} (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 \\ (u^2 + v^2)^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2 \end{cases}$

El triángulo es rectángulo.

www.yoquieroaprobar.es

5 Razones trigonométricas

1. Calcula todos los ángulos x que verifiquen que $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, expresando los resultados en grados sexagesimales y en radianes.

2. Calcula todos los ángulos x que verifiquen que $\cos x = \frac{1}{2}$, expresando los resultados en grados sexagesimales y en radianes.

3. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

4. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2 \text{ sen } x} - \frac{\text{sen } 2x}{1 + \cos 2x} = \text{sen } x - \text{tg } x$$

5. Sea un ángulo tal que $\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$. Comprueba que $a \cos 2\alpha + b \text{ sen } 2\alpha = a$.

6. Escribe el valor de sen 3a y cos 3a en función de sen a y cos a.

7. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen } \alpha = h$, calcula en función de h el valor de $\text{cotg}(180° + \alpha)$.

8. Sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen } \alpha = h$, calcula en función de h el valor de $\frac{\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha}{\cos 2\alpha - \text{sen } 2\alpha}$.

9. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, expresando los resultados en radianes:

$$\text{tg } x + 4 \text{ cotg } x = 5$$

10. Simplifica todo lo que puedas la siguiente expresión trigonométrica: $\frac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\text{sen}(2a + b) + \text{sen}(2a - b)}$

11. Considera la siguiente expresión trigonométrica: $\text{sen } x + \frac{4}{3} \cos^2 x = \frac{3}{2}$

Estamos interesados en calcular todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que la verifican.

1. Simplifica todo lo que puedas la expresión. Para ello, un buen camino sería intentar conseguir otra equivalente a la anterior y en la que solo aparezca una de las razones trigonométricas.
2. Posiblemente hayas conseguido una expresión de segundo grado en la que la incógnita sea, tal vez, sen x. Puedes resolver, mediante el procedimiento habitual de las ecuaciones de segundo grado, y calcular, de esta forma, el valor o valores de sen x.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. Los ángulos del primer y segundo cuadrantes tienen el seno positivo:

$x = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad $\qquad x = 120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

Por tanto, todos los ángulos x son de la forma:

$$x = 60° + 360°\ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ rad}$$

$$x = 120° + 360°\ k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ rad}$$

2. Los ángulos del primer y cuarto cuadrante tienen el coseno positivo:

$x = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad $\qquad x = 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad

Por tanto, todos los ángulos x son de la forma:

$$x = 60° + 360°\ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ rad}$$

$$x = 300° + 360°\ k = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \text{ rad}$$

3. Desarrollando $\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b)$:

$$(\text{sen}\,a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen}\,b)(\text{sen}\,a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\,b) =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - \cos^2 a\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - (1 - \text{sen}^2 a)\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a \cos^2 b - \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b =$$
$$= \text{sen}^2 a(\cos^2 b + \text{sen}^2 b) - \text{sen}^2 b = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

4. $$\frac{1 - \cos 2x}{2\ \text{senx}} - \frac{\text{sen}\ 2x}{1 + \cos 2x} =$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{2\ \text{sen}\ x} - \frac{2\ \text{sen}\ x \cos x}{1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x} =$$
$$= \frac{2\ \text{sen}^2 x}{2\ \text{sen}\ x} - \frac{2\ \text{sen}\ x \cos x}{2 \cos^2 x} = \text{sen}\ x - \text{tg}\ x$$

5. $$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \text{sen}\ \alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},\ \text{sen}\ 2\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cos 2\alpha + b\ \text{sen}\ 2\alpha = \frac{a^3 - ab^2 + 2ab^2}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = a$$

6. $$\text{sen}\ 3a = \text{sen}(2a + a) =$$
$$= \text{sen}\ 2a \cos a + \cos 2a\ \text{sen}\ a =$$
$$= 2\ \text{sen}\ a \cos^2 a + \cos^2 a\ \text{sen}\ a - \text{sen}^3 a =$$
$$= 3\ \text{sen}\ a \cos^2 a - \text{sen}^3 a \cos 3a =$$

$$\cos 3a = \cos(2a + a) =$$
$$= \cos 2a \cos a - \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ a =$$
$$= \cos^3 a - \text{sen}^2 a \cos a - 2\ \text{sen}^2 a \cos a =$$
$$= \cos^3 a - 3\ \text{sen}^2 a \cos a$$

7. $$\text{cotg}(180° + \alpha) = \frac{\cos(180° + \alpha)}{\text{sen}(180° + \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\text{sen}\ \alpha} = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}$$

8. $$\frac{\cos^4\alpha - \text{sen}^4\alpha}{\cos 2\alpha - \text{sen}\ 2\alpha} =$$
$$= \frac{(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) \cdot (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha - 2\ \text{sen}\ \alpha \cos\alpha} =$$
$$= \frac{1 - h^2 - h^2}{1 - h^2 - h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}} =$$
$$= \frac{1 - 2h^2}{1 - 2h^2 - 2h\sqrt{1 - h^2}}$$

9. $$\text{tg}\ x + 4\ \text{cotg}\ x = 5 \Rightarrow \text{tg}\ x + \frac{4}{\text{tg}\ x} = 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg}^2 x + 4 = 5\ \text{tg}\ x \Rightarrow \text{tg}^2 x - 5\ \text{tg}\ x + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tg}\ x \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{tg}\ x = 4 \Rightarrow x \approx 1{,}32 + 2k\pi \\ \text{tg}\ x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \text{con } k \in Z$$

10. $$\frac{\cos(2a - b) - \cos(2a + b)}{\text{sen}(2a + b) + \text{sen}(2a - b)} =$$
$$= \frac{\cos 2a \cos b + \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b - \cos 2a \cos b + \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b}{\text{sen}\ 2a \cos b + \cos 2a\ \text{sen}\ b + \text{sen}\ 2a \cos b - \cos 2a\ \text{sen}\ b} =$$
$$= \frac{2\ \text{sen}\ 2a\ \text{sen}\ b}{2\ \text{sen}\ 2a \cos b} = \text{tg}\ b$$

11. $$\text{sen}\ x + \frac{4}{3}\cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow 6\ \text{sen}\ x + 8 \cos^2 x = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\ \text{sen}\ x + 8(1 - \text{sen}^2 x) = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8\ \text{sen}^2 x - 6\ \text{sen}\ x + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}\ x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30° \\ x = 150° \end{array}\right. \\ \text{sen}\ x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 14{,}4775... = 14°28'39'' \\ x = 165{,}5224... = 165°31'21'' \end{array}\right. \end{array}\right.$$

www.yoquieroaprobar.es

6 Resolución de triángulos

1. Teorema de las tangentes.

a) Comprueba que en toda proporción numérica se verifica la siguiente propiedad:
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$

b) Aplica el apartado anterior para demostrar que en todo triángulo se verifica que: $\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B}$, siendo a y b dos de sus lados y A y B los correspondientes ángulos opuestos.

c) Calcula el valor de dos ángulos x e y, tales que su suma sea igual a la medida del ángulo A y su diferencia igual a la del B.

d) Ayudándote de los apartados b y c, demuestra el siguiente teorema:

«En todo triángulo se verifica que $\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{tg } \frac{A + B}{2}}{\text{tg } \frac{A - B}{2}}$, siendo a y b dos lados cualesquiera y A y B sus correspondientes ángulos opuestos».

e) Resuelve el triángulo ABC del cual se conoce $a = 15$ cm, $b = 12$ cm y $A - B = 15°$.

2. Suponiendo que A, B y C son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, demuestra que la suma de sus tangentes es igual al producto de las mismas.

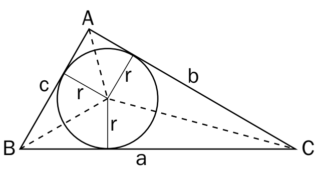
3. De un triángulo sabemos que $\frac{\text{sen}(B + A)}{\text{sen}(B - A)} = 1$. Demuestra que se trata de un triángulo rectángulo en B.

4. Calcula, en función del número de lados, el área del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

5. a) Demuestra que $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$.

b) Ayudándote de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados a, b y c, respectivamente, se verifica que $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$, siendo p el valor del semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$.

6. a) Demuestra que el área del triángulo de la figura es $S = p \cdot r$, siendo p el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita.



b) Calcula el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo de lados 10, 15 y 16 cm.

7. Las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α. Demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula $S = \frac{1}{2} d \cdot D \cdot \text{sen } \alpha$.

8. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 y 32 cm, respectivamente. Calcula el área del triángulo que tiene por vértices el ortocentro, el baricentro y el circuncentro del triángulo dado.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}$

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{kb + kd}{kb - kd} = \frac{k(b + d)}{k(b - d)} = \frac{b + d}{b - d}$$

b) Por el teorema de los senos $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B}$

se tiene directamente $\dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B}$

c) $\begin{cases} x + y = A \\ x - y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = A + B \\ 2y = A - B \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{A + B}{2}; \quad y = \dfrac{A - B}{2}$

d) $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B} = \dfrac{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)}{\text{sen}(x+y)-\text{sen}(x-y)} =$

$$= \frac{2 \text{ sen } x \cos y}{2 \cos x \text{ sen } y} = \frac{\text{tg } x}{\text{tg } y} = \frac{\text{tg } \dfrac{A + B}{2}}{\text{tg } \dfrac{A - B}{2}}$$

e) $A = 57{,}33... = 57° \ 20' \ 12''$
$B = 42{,}33... = 42° \ 20' \ 12''$
$C = 80{,}32... = 80° \ 19' \ 37''$

$c \approx 17{,}6$ cm

2. $A + B = 180° - C \Rightarrow \text{tg}(A + B) = \text{tg}(180° - C) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \cdot \text{tg } B} = -\text{tg } C \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{tg } A + \text{tg } B = -\text{tg } C + \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C$

3. $\dfrac{\text{sen}(B + A)}{\text{sen}(B - A)} = 1 \Rightarrow \text{sen}(B + A) = \text{sen}(B - A)$

$\begin{cases} B + A = B - A \Rightarrow A = 0° & \text{No sería triángulo.} \\ (B + A) + (B - A) = 180° \Rightarrow 2B = 180° \Rightarrow B = 90° \end{cases}$

Por tanto, se trata de un triángulo rectángulo en B.

4. Se llama S_t a la superficie de un triángulo cuyos lados son un lado del polígono y dos radios de la circunferencia circunscrita, el área del polígono de n lados inscrito en una circunferencia de radio 10 cm es:

$$S = n \cdot S_t = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^2 \text{ sen } \frac{360°}{n} = 50n \cdot \text{sen } \frac{360°}{n}$$

5. a) $1 + \cos A = 1 + \cos^2 \dfrac{A}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{A}{2} = 2 \cos^2 \dfrac{A}{2}$

b) $2 \cos^2 \dfrac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(b + c + a) \cdot (b + c - a)}{2bc} = \frac{2p(p - a)}{bc}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}$$

6. a) Se puede descomponer el triángulo ABC en tres triángulos, cada uno de los cuales tiene por base un lado del triángulo dado y por altura r:

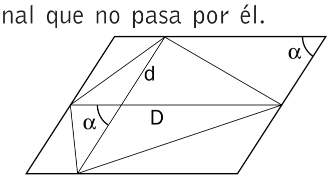
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} =$$

$$= \frac{(a + b + c) \cdot r}{2} = p \cdot r$$

b) $S = p \cdot r \Rightarrow \sqrt{20{,}5 \cdot 10{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 4{,}5} = 20{,}5r \approx 73$

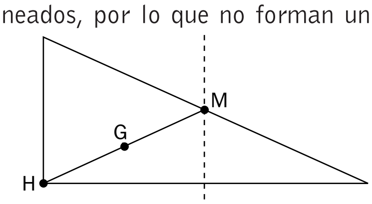
$r \approx 3{,}56$ cm

7. Dado el cuadrilátero, dibujamos el paralelogramo que se obtiene al trazar por cada vértice la paralela a la diagonal que no pasa por él.



$$S_{\text{cuadrilátero}} = \frac{1}{2} S_{\text{paralelogramo}} = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \text{sen } \alpha$$

8. Al ser un triángulo rectángulo, el ortocentro H coincide con el vértice del ángulo de 90°. Si trazamos la mediatriz del cateto de 24 cm y aplicamos el teorema de Tales, observamos que dicha mediatriz pasa por el punto medio M de la hipotenusa. Por tanto, el circuncentro del triángulo está situado en el punto medio de la hipotenusa. Por último, el baricentro G está situado en el segmento de extremos del ortocentro y el circuncentro, ya que este es una de las medianas del triángulo. Por tanto, los tres puntos están alineados, por lo que no forman un triángulo.

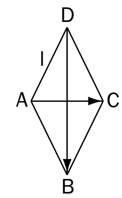


www.yoquieroaprobar.es

7 Los vectores en el plano

1. Expresa el vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ como suma de un vector que tenga la misma dirección que $\vec{a}(3, 1)$ y de otro que sea perpendicular a este último.

2. Considera el rombo ABCD de la figura.



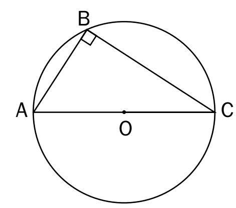
a) ¿Puedes escribir los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$ que determinan las diagonales, en función de los vectores que determinan los lados DA y AB?

b) Ayudándote del apartado anterior, intenta calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$.

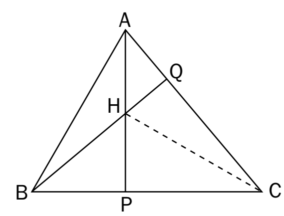
c) ¿Qué interpretación geométrica puedes dar? Recuerda que las medidas de los lados de un rombo son todas iguales.

3. Podemos considerar los lados de un triángulo como tres vectores cuya suma es el vector nulo. Con esta idea, y con la ayuda del producto escalar, intenta obtener otra demostración del teorema del coseno.

4. Dos puntos A y C son diametralmente opuestos en una cierta circunferencia, tal y como muestra la figura. Consideramos otro punto B distinto de los anteriores, pero que también pertenece a la circunferencia. Demuestra que el ángulo ABC es un ángulo recto.



5. Consideramos el triángulo ABC de la figura en el que se han dibujado dos de sus alturas AP y BQ.



a) Escribe el vector $\overrightarrow{CH}$ en función de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{BH}$.

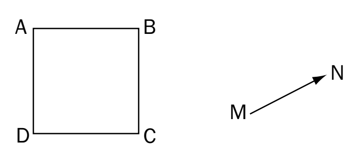
b) Escribe el vector $\overrightarrow{BA}$ en función de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$.

c) Calcula el producto escalar $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA}$.

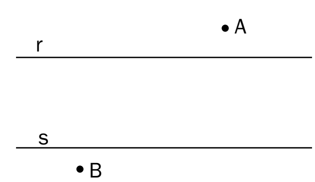
d) Interpreta geométricamente el resultado obtenido en el apartado anterior.

6. Dibuja un trapecio del cual solo conoces las medidas de sus bases y las de sus dos diagonales.

7. Trata de dibujar un paralelogramo cuyos vértices estén situados en cada uno de los lados del cuadrado ABCD de la figura y uno de cuyos lados tenga la misma longitud y la misma dirección que el vector de extremos M y N.



8. Los pueblos A y B están situados a ambos lados del río limitado por las rectas paralelas r y s, tal y como muestra la figura. Los ayuntamientos de ambas localidades quieren construir un puente que atraviese el río y que cumpla las condiciones siguientes:



i) El puente debe ser perpendicular a las rectas r y s.
ii) El camino que va de A a B, atravesando el puente, debe ser mínimo.

Indica el lugar exacto donde se ha de realizar la construcción.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. Un vector perpendicular a $\vec{a}$ es $\vec{b} = (-1, 3)$.

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} = (2, -3)$

$\lambda(3, 1) + \mu(-1, 3) = (3\lambda - \mu, \lambda + 3\mu)$

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = 2 \\ \lambda + 3\mu = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{10},\ \mu = -\frac{11}{10}$$

Por tanto: $\vec{u} = \frac{3}{10}\vec{a} - \frac{11}{10}\vec{b}$

2. a) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

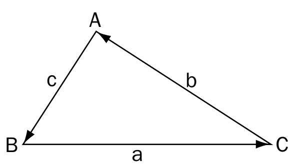
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = l^2 - l^2 = 0$

c) Las diagonales de un rombo son siempre perpendiculares.

3.



$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - A)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

4. Sea r el radio de la circunferencia.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}) =$

$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} =$

$= r^2 \cos 0^\circ - r^2 \cos 0^\circ = r^2 - r^2 = 0$

Por tanto: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$

5. a) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}$

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) =$

$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CB} =$

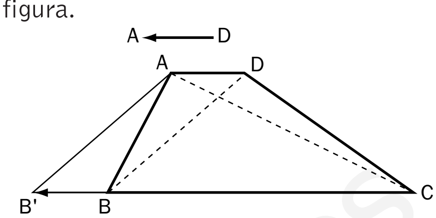
$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CB} =$

$= \overrightarrow{CB}\,(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{CB}\,(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH}) =$

$= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$

d) Los vectores $\overrightarrow{CH}$ y $\overrightarrow{BA}$ son perpendiculares y el segmento CH estará contenido en la tercera altura del triángulo. Por ello, se deduce que las tres alturas de un triángulo son concurrentes en el punto H.

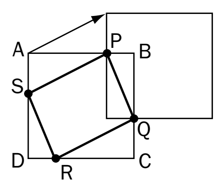
6. Consideremos el problema resuelto tal y como se ve en la figura.



Observamos que al trasladar la diagonal DB según el vector $\overrightarrow{DA}$ se puede formar el triángulo AB′C que tiene por lados las dos diagonales conocidas y la suma de las dos bases.

Por tanto, para construir el trapecio dibujamos primero el triángulo B′AC y posteriormente dibujamos el segmento paralelo al B′A y que tiene por extremo el punto B. El otro extremo será el vértice D del trapecio.

7.

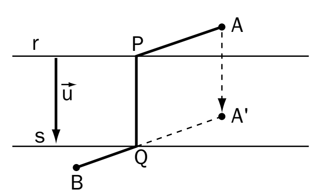


Trazamos el cuadrado auxiliar que se obtiene al trasladar el dado según el vector guía $\overrightarrow{MN}$. Los dos cuadrados se cortan en los puntos P y Q.

Los puntos R y S se obtienen como los homólogos de P y Q respecto de la traslación de vector guía $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

Los puntos P, S, R y Q son los vértices del paralelogramo buscado.

8.



Consideramos el vector $\vec{u}$ perpendicular a r y s y cuyo origen está en r y extremo en s.

Se calcula el punto A′ homólogo de A en la traslación de vector guía $\vec{u}$.

La intersección de la recta que pasa por A′ y B con s es el punto Q. El punto P es el homólogo de Q en la traslación de vector guía $-\vec{u}$.

El lugar buscado para la ubicación del puente es el correspondiente al segmento PQ.

El camino A ⟶ P ⟶ Q ⟶ B es mínimo, ya que los puntos B, Q y A′ están alineados.

www.yoquieroaprobar.es

8 La recta en el plano

1. Calcula los coeficientes a y b para que las rectas r: $3x - 2 = ay$ y s: $4y - 5 = bx$ sean paralelas, sabiendo además que la primera de ellas pasa por el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

2. Comprueba si las rectas r: $6x - 5y + 12 = 0$, s: $y = 6$ y t: $2x + 5y - 36 = 0$ pasan por un mismo punto y, en caso positivo, calcula las coordenadas de dicho punto.

3. Estudia, según los distintos valores del parámetro λ, las posiciones relativas de las siguientes rectas del plano:

$(\lambda - 1)x - 2\lambda y = 11$; $\lambda x - (5\lambda - 2)\, y = 6$

4. Halla las coordenadas del extremo B de un segmento AB sabiendo que las coordenadas de A son $(2, -2)$ y que el punto $P(-4, 1)$ está situado en el interior de dicho segmento y de tal forma que lo divide en dos partes cuyas longitudes son proporcionales a 3 y 2.

5. Estudia, según los diferentes valores del parámetro a, la posición relativa de los puntos $A(3a, 2)$, $B(6a, -2)$ y $C(-3, 3a + 2)$; es decir, indica en qué casos dichos puntos son los vértices de un triángulo y en qué casos están alineados.

6. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son los puntos $A(3, 2)$ y $B(4, 0)$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices sabiendo que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto $T\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

7. El paralelogramo ABCD verifica que tres de sus vértices tienen por coordenadas $A(4, 3)$, $B(5, 0)$ y $C(-1, -2)$:

a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.

b) Demuestra que se trata de un rectángulo.

c) Dado el punto $P(2, 1)$, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{PD}$, así como sus respectivos módulos.

d) Demuestra que la suma de los cuadrados de las distancias que separan a P de A y de C coincide con la suma de los cuadrados de las distancias que separan a P de B y de D.

8. Consideramos el cuadrilátero de vértices $A(-1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(9, -6)$ y $D(-3, -4)$:

a) Escribe las coordenadas y los módulos de los vectores diagonales $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

b) Escribe las coordenadas de los vértices del cuadrilátero que se forma al unir por los puntos medios M, N, P y Q de los lados del anterior.

c) Demuestra que el nuevo cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

d) Calcula las coordenadas y los módulos de los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NP}$.

e) Demuestra que el perímetro del rectángulo MNPQ coincide con la suma de las longitudes de las diagonales del rectángulo ABCD.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. Se resuelve el sistema de ecuaciones y obtenemos el punto de intersección P(2, 2).

Obligamos a que las ecuaciones tengan la misma pendiente y a que r pase por P:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a} = \dfrac{b}{4} \\ 6 - 2 = 2a \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{12}{a} = \frac{12}{2} = 6$$

2. $$\begin{cases} 6x - 5y + 12 = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 6 \Rightarrow P(3, 6)$$

Comprobamos si P verifica la tercera ecuación:

$2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 36 = 6 + 30 - 36 = 0 \Rightarrow$

Las tres rectas se cortan en el punto P.

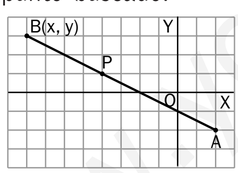
3. Las pendientes de las rectas son:

$$m_1 = \frac{\lambda - 1}{2\lambda} \text{ y } m_2 = \frac{\lambda}{5\lambda - 2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{\lambda - 1}{2\lambda} = \frac{\lambda}{5\lambda - 2} \Rightarrow 3\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \\ \lambda = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \\ \lambda \neq 2 \text{ y } \lambda \neq \dfrac{1}{3} \text{ las rectas son secantes} \end{cases}$$

4. Sea B(x, y) el punto buscado.



Se debe verificar que:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$$

$$(-6, 3) = \left(\frac{3(x + 4)}{2}, \frac{3(y - 1)}{2}\right)$$

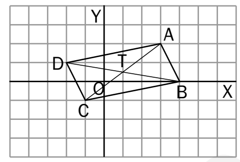
$$\begin{cases} 3x + 12 = -12 \Rightarrow x = -8 \\ 3y - 3 = 6 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-8, 3)$$

5. Para que los puntos A, B y C estén alineados se debe verificar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3a, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-3 - 3a, 3a) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3a}{-3 - 3a} = \frac{-4}{3a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 12a - 12 = 0 = \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

6. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Por tanto, T es el punto medio del segmento de extremos D y B.



Sea D(x, y):

$$\frac{4 + x}{2} = 1;\ \frac{0 + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2;\ y = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ D(−2, 1)

T es el punto medio del segmento de extremos C y A.

Sea C(x, y):

$$\frac{3 + x}{2} = 1;\ \frac{2 + y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1;\ y = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ C(−1, −1)

7. a) Las diagonales se cortan en el punto M:

$$M = \left(\frac{4 - 1}{2}, \frac{3 - 2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Sea } D(x, y) \Rightarrow \frac{5 + x}{2} = \frac{3}{2};\quad \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow D(-2, 1)$$

b) Los vectores $\overrightarrow{AD} = (-6, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$ son ortogonales, ya que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -6 + 6 = 0$.

Por tanto, el paralelogramo es un rectángulo.

c) $\overrightarrow{PA} = (2, 2)$ $\quad |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PB} = (3, -1)$ $\quad |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{PC} = (-3, -3)$ $\quad |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PD} = (-4, 0)$ $\quad |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{16} = 4$

d) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 8 + 18 = 26$

$|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 = 10 + 16 = 2$

8. a) $\overrightarrow{AC} = (10, -8)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$

$\overrightarrow{BD} = (-10, -8)$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164}$

b) M(3, 3), N(8, −1), P(3, −5), Q(−2, −1)

c) $\overrightarrow{MN} = (5, -4) = \overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QM} = (5, 4) = \overrightarrow{PN}$

d) $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$|\overrightarrow{NP}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

e) Perímetro de MNPQ$= 4\sqrt{41} = 2\sqrt{164} = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BD}|$

www.yoquieroaprobar.es

9 Problemas métricos

1. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3, 2) y forma con la parte positiva del eje de abscisas un ángulo de 120°.

2. Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto P(2, 3) y forman con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes.

3. La recta r: $x + 5y - 8 = 0$, al cortar a s: $3x + 2y - 6 = 0$ y al eje de abscisas, determina un segmento de extremos A y B. Calcula la longitud de dicho segmento, así como la ecuación de su mediatriz.

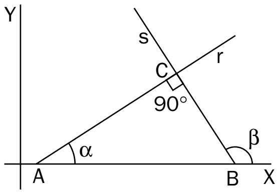
4. Una recta paralela al eje de abscisas divide al triángulo de vértices A(1, 1), B(3, 7) y C(7, 1) en un trapecio y en otro triángulo. Calcula la ecuación de dicha paralela para que el área del trapecio sea las tres cuartas partes del área del triángulo inicial.

5. Calcula la recta que dista $\sqrt{5}$ unidades del punto que tiene por coordenadas (0, −3) de entre todas las rectas que pasan por el punto P(0, 2).

6. Considera las rectas perpendiculares r y s de la figura.

a) Escribe el ángulo β en función del ángulo α.

b) Suponiendo que m_r y m_s son las pendientes de r y de s, respectivamente, demuestra que $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

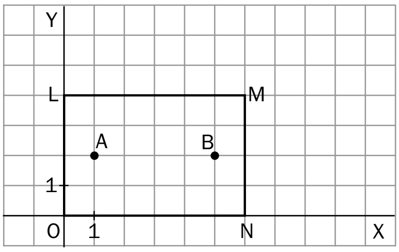


7. Suponiendo que m_r y m_s son las pendientes de las rectas r y s, respectivamente, demuestra que el ángulo que forman dichas rectas puede ser calculado mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

8. Dadas las rectas r: $x - y = 0$ y s: $x + y - 7 = 0$ y el segmento de extremos A(2, 9) y B(5, 8), calcula las coordenadas de los extremos de un segmento CD de la misma longitud que AB, paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r.

9. Traza el camino que debe seguir la bola A para que, después de haber rebotado en las bandas LM y MN consecutivamente, choque con la bola B.



SOLUCIONES

1. $m = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 3)$

2. La bisectriz del primer cuadrante forma con la parte positiva de OX un ángulo de 45°. Por tanto, si consideramos que es el ángulo que forma la recta buscada con la parte positiva del eje OX:

$\alpha = 45° + 30° = 75° \Rightarrow y - 3 = \text{tg } 75°\ (x - 2)$
siendo $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7320...$

$\alpha = 45° - 30° = 15° \Rightarrow y - 3 = \text{tg } 15°\ (x - 2)$
siendo $\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3} = 0{,}2679...$

3. $\begin{cases} x + 5y = 8 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{14}{13}, \frac{18}{13}\right)$

$\begin{cases} x + 5y = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(8, 0)$

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{90}{13}, -\frac{18}{13}\right)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{8\,100 + 324}{13^2}} = \frac{18\sqrt{26}}{13}$

Mediatriz de AB: $\begin{cases} M\left(\frac{59}{13}, -\frac{9}{13}\right) \\ \vec{u} = (18, 90) \parallel (1, 5) \end{cases}$

$\Rightarrow 65x - 13y - 304 = 0$

4. Los dos triángulos implicados son semejantes.

Como la razón de sus áreas es $\frac{1}{4}$, la razón de sus lados será $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; lo cual quiere decir que los vértices del triángulo menor son MBN, siendo M(2, 4) y N(5, 4) los puntos medios de los segmentos AB y BC.

La recta buscada es la paralela al eje OX: $y = 4$.

5. La recta buscada tendrá por ecuación
$r: y - 2 = mx \Rightarrow mx - y + 2 = 0$

$d(r, (0,-3)) = \sqrt{5} = \frac{5}{\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow$

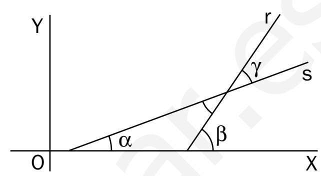
$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0 \\ m = -2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

6. a) $\beta = 180° - (180° - 90° - \alpha) = 90° + \alpha$

b) $m_s = \text{tg } \beta = \text{tg}(90° + \alpha) = \frac{\text{sen}(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} =$

$= -\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = -\frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{1}{m_r}$

7.



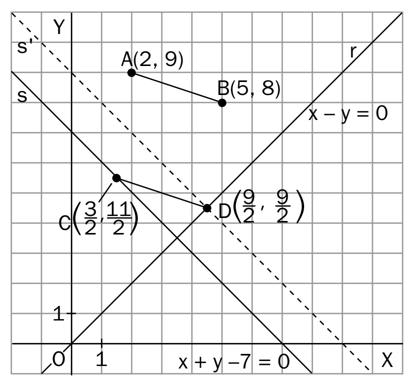
$\gamma = 180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha$

$\text{tg } \gamma = \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$

8. Ecuación de s′, trasladada de s, según $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$:

s′ será de la forma $x + y + k = 0$ y pasa por el punto (3, 6). Por tanto: $x + y - 9 = 0$.

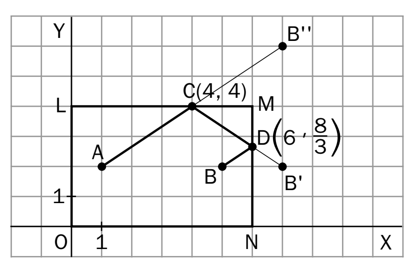
El punto D es la intersección de r y s′ y C será el trasladado de D según $-\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$.



9. Llamamos B′, simétrico de B respecto de MN, y B″, simétrico de B′ respecto de LM.

La intersección de AB″ con LM es el punto C y la de CB′ con MN es D.

El camino que ha de seguir la bola A es:
$A \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow B$



www.yoquieroaprobar.es

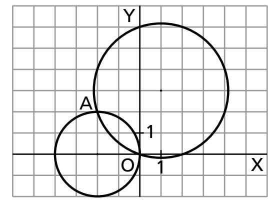
10 Cónicas

1. Dadas las circunferencias representadas en la figura:

a) Calcula la ecuación de su eje radical.

b) Calcula los extremos y la longitud del segmento que determina la cuerda común a dichas circunferencias.

c) Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento mencionado en el apartado anterior.



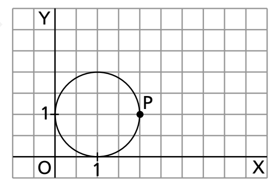
2. Calcula la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados descansan en las rectas determinadas por las ecuaciones:

$$r: x + y = 0 \qquad s: x - y = 4 \qquad t: x = 0$$

3. La circunferencia que aparece en la figura es tangente a los ejes de coordenadas y pasa por el punto P(2, 1).

a) Calcula la ecuación de dicha circunferencia.

b) ¿Existe una única circunferencia que cumpla las condiciones mencionadas en este enunciado?



4. Dada la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$:

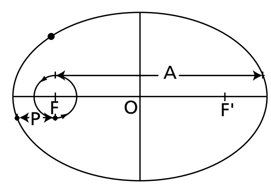
a) Calcula la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el de la elipse y cuyo radio es igual a la semidistancia focal de la elipse.

b) Calcula las coordenadas de los cuatro puntos de corte de ambas cónicas.

c) Calcula el área del rectángulo determinado por los cuatro puntos hallados anteriormente.

5. Escribe el valor de la excentricidad de la elipse que describe un planeta en su movimiento de traslación alrededor del Sol en función de su afelio A, máxima distancia del planeta al Sol, y perihelio P, mínima distancia del planeta al Sol.

Aplicación: Calcula la máxima distancia que puede separar a la Tierra del Sol sabiendo que la mínima distancia entre ambos cuerpos celestes es de $1{,}461 \cdot 10^8$ km y que la excentricidad de la correspondiente elipse es de aproximadamente $\dfrac{1}{62}$.

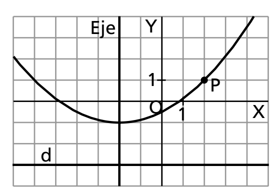


6. Considera la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y considera una cuerda paralela al eje OY, que pasa por uno de sus focos. Calcula las coordenadas de los extremos de la cuerda.

7. Dada la parábola de ecuación $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{17}{3}$, calcula las coordenadas de su vértice, el valor de su parámetro y las coordenadas de su foco.

8. Escribe la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje ordenadas y tal que pasa por los puntos A(−1, 6), B(2, 3) y C(1, −2).

9. Halla la ecuación de una parábola que pasa por el punto P(2, 1) tal que su directriz es la recta horizontal $y + 3 = 0$ y su eje es la recta vertical $x + 2 = 0$.



10. Sea el foco F(−1, 2) y la directriz la recta de ecuación $y + 2 = 0$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la distancia al foco coincida con la distancia a la directriz. ¿De qué lugar geométrico se trata? Indica sus elementos más importantes.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) Las ecuaciones de las circunferencias son

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2+y^2+4x = 0 \\ (x-1)^2+(y-3)^2 = 10 \Rightarrow x^2+y^2-2x-6y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - x^2 - y^2 + 2x + 6y = 0$$

El eje radical es: $x + y = 0$

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2, 2) \quad O(0, 0)$

$AO = \sqrt{8}$ unidades

c) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$

2. Los vértices son: $A(2, -2)$, $B(0, -4)$ y $O(0, 0)$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 + 4 + 2D - 2E + F = 0 \\ 16 - 4E + F = 0 \\ F = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0,\ E = 4,\ F = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y = 0$$

3. a) Dado que la circunferencia es tangente a los dos ejes de coordenadas se debe verificar que su centro es de la forma $C(r, r)$ y que su radio mide r. Por tanto, su ecuación es $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

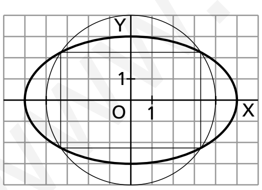
Como pasa por el punto $P(2, 1)$:

$$(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \\ r = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Existen dos soluciones.

4.



a) $a = 5,\ b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$

Circunferencia con centro $C(0, 0)$ y radio $r = c = 4$:

$$x^2 + y^2 = 16$$

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}\ \dfrac{9}{4}\right)\ B\left(-\dfrac{5\sqrt{7}}{4}\ \dfrac{9}{4}\right)$

$C\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}\ -\dfrac{9}{4}\right)\ D\left(-\dfrac{5\sqrt{7}}{4}\ -\dfrac{9}{4}\right)$

c) $S = \dfrac{5\sqrt{7}}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = \dfrac{45}{4}\sqrt{7}$ unidades cuadradas

5. De las relaciones $\begin{cases} A = a + c \\ P = a - c \end{cases}$, se deduce que

$$\begin{cases} a = \dfrac{A + P}{2} \\ c = \dfrac{A - P}{2} \end{cases} \quad \text{Por tanto, } e = \frac{c}{a} = \frac{A - P}{A + P}$$

$$\frac{1}{62} = \frac{A - 1{,}461 \cdot 10^8}{A + 1{,}461 \cdot 10^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{63 \cdot 1{,}461}{61} \cdot 10^8 \approx 1{,}509 \cdot 10^8 \text{ km}$$

6. La cuerda estará contenida en la recta $x = c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Por tanto, los extremos de la cuerda serán:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\sqrt{a^2 - b^2}, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } B\left(\sqrt{a^2 - b^2}, -\frac{b^2}{a}\right)$$

7. $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{17}{3} \Rightarrow \dfrac{3}{2}y = (x - 2)^2 - 4 + \dfrac{17}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = (x - 2)^2 \Rightarrow 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot (y - 3) = (x - 2)^2$$

Por tanto: $V(2, 3)$ $p = \dfrac{3}{4}$ $F\left(2, 3 + \dfrac{p}{2}\right) = \left(2, \dfrac{27}{8}\right)$

8. $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = -6 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ a + b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 1\ \ b = 2\ \ c = -5 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 5$$

9. El vértice y el foco deben pertenecer a la recta $x + 2 = 0$. Se puede suponer que las coordenadas del vértice son $V(-2, a)$. La ecuación de la parábola será de la forma: $2 \cdot p \cdot (y - a) = (x + 2)^2$. Se debe verificar:

$$\begin{cases} 2p(1 - a) = 16 \\ a + 3 = \dfrac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ p = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(y + 1) = (x + 2)^2$$

10. $d(X, F) = d(X, d) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = |y + 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 8y = (x + 1)^2$$

Parábola de vértice $V(-1, 0)$ y parámetro p.

www.yoquieroaprobar.es

11 Números complejos

1. Sean z_1, z_2 y z_3 las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestra que se verifica la siguiente igualdad:

$$(z_1 - z_2 + z_3) \cdot (z_1 + z_2 - z_3) = 4$$

2. Demuestra que para cualquier número natural n se verifica:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} = 2$$

3. Representamos por $\bar{z}$ el conjugado del número complejo z; es decir, si $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

a) Demuestra que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ para cualquier pareja de números complejos z_1 y z_2.

b) Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ para cualquier número complejo z.

c) Ayudándote de los apartados anteriores, comprueba que: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

4. Con ayuda del cociente de los números complejos $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$ y $z_2 = 1 + i$, calcula valores exactos de $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$ y de $\cos\frac{5\pi}{12}$.

5. Resuelve, en el conjunto de los números complejos, la ecuación $z^4 = \bar{z}$.

6. Regiones del plano definidas con la ayuda de los números complejos.

Has visto que se puede asociar a cada número complejo su afijo, que no es más que un punto del plano geométrico. Por esta razón, se pueden definir ciertas regiones del plano con la ayuda de expresiones algebraicas en las que intervienen números complejos. En primer lugar, demuestra las siguientes afirmaciones:

a) El módulo de la diferencia de dos números complejos es igual a la distancia que separa a sus afijos.

b) $|z - (1 + i)| = 3$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen a la circunferencia de centro el punto (1, 1) y radio 3.

c) El conjunto de números complejos z tales que $|z| = 5$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 5.

d) $|z - i| \leqslant 3$ representa el conjunto de puntos del plano que pertenecen al círculo de centro (0, 1) y radio 3, incluidos los que pertenecen a la circunferencia que lo limita.

7. Representa geométricamente el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$|z - i| = |z + 2|$$

8. Sea Re(z) la parte real del número complejo z y sea Im(z) la parte imaginaria del mismo número complejo, es decir: si $z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = a \\ \text{Im}(z) = b \end{cases}$

Representa geométricamente el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$\begin{cases} -1 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 3 \\ \text{Im}(z - i) \geqslant 2 \end{cases}$$

9. Determina el conjunto de puntos del plano definido por los afijos de los números complejos z que verifican:

$$\begin{cases} \text{Re}(iz) \leqslant 2 \\ \text{Im}(-iz) = 3 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $z_1^2 - (z_2 - z_3)^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 2z_2z_3 =$
$= (1_{0°})^2 - (1_{120°})^2 - (1_{240°})^2 + 2 \cdot 1_{120°} \cdot 1_{240°} =$
$=1-(\cos 240°+i\,\text{sen}\,240°)-(\cos 120°+i\,\text{sen}\,120°)+2=$
$= 1 + 0{,}5 + 0{,}5 + 2 = 4$

2. $(1_{120°})^{3n} + (1_{240°})^{3n} = 1_{360°n} + 1_{720°n} = 1 + 1 = 2$

3. a) Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{z_1+z_2} = (a+c)-(b+d)i \\ \overline{z_1}+\overline{z_2} = a - bi + c - di\end{array}\right. \Rightarrow \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$$

b) $$\left\{\begin{array}{l}z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2 \\ |z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2\end{array}\right. \Rightarrow z\cdot\overline{z} = |z|^2$$

c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$
$= (z_1 + z_2)\cdot\overline{z_1 + z_2} + (z_1 - z_2)\cdot\overline{z_1 - z_2} =$
$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$
$= |z_1|^2 + z_1\cdot\overline{z_2} + z_2\cdot\overline{z_1} + |z_2|^2 + |z_1|^2 -$
$- z_1\cdot\overline{z_2} - z_2\cdot\overline{z_1} + |z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

4. $$\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{2_{\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}_{\frac{5\pi}{12}}} =$$
$$= \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\,i$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}$$
$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}$$
$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5. $z = r_\alpha$
$\overline{z} = r\cos\alpha - r\,\text{sen}\,\alpha i = r(\cos(-\alpha) + \text{sen}(-\alpha)i) = r_{-\alpha}$

Por tanto, la ecuación se puede escribir como:

$r^4_{4\alpha} = r_{-\alpha} \Rightarrow r^4 = r$ y $4\alpha = -\alpha + 360°\,k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 0 \Rightarrow z = 0 \\ r = 1 \text{ y } \alpha = 72°\,k \text{ con } k = 0, 1, 2, 3 \text{ ó } 4\end{array}\right.$$

6. a) Se toman $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
A(a, b), B(c, d)

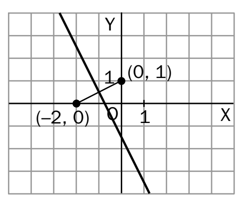
$$\left.\begin{array}{l}|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \\ d(A, B) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = d(A, B)$$

b) Por el apartado anterior, $|z - (1 + i)| = 3$ representa al conjunto de puntos z del plano tales que su distancia al punto (1, 1) es igual a tres, es decir, representa a la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

c) Por el apartado a, $|z| = |z - (0 + 0i)| - 5$ representa una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 5.

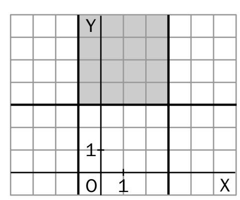
d) $|z - i|$ representa la distancia existente entre el punto asociado al número complejo z y el punto (0, 1). Si esta distancia debe ser menor o igual que 3, estarán incluidos todos los puntos que pertenecen al interior o a la frontera de la circunferencia de centro (0, 1) y radio 3.

7. El conjunto de puntos tales que $|z - i| = |z + 2|$ representa la mediatriz del segmento de extremos (0, −1) y (−2, 0).



8. Sea $z = x + iy$.

$$\left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant \text{Re}(z) \leqslant 3 \\ \text{Im}(z - i) \geqslant 2\end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ y - 1 \geqslant 2\end{array}\right. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ y \geqslant 3\end{array}\right.$$



9. Sea $z = x + iy$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Re}(iz) \leqslant 2 \\ \text{Im}(-iz) = 3\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -y \leqslant 2 \\ -x = 3\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y \geqslant -2 \\ x = -3\end{array}\right.$$

www.yoquieroaprobar.es

12 Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x - 2)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 1}}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt[3]{1 + x} + 1}$

2. Con los datos de la siguiente tabla, halla por interpolación lineal el valor de $\sqrt{1,6}$:

x	0	1	2
$\sqrt{1 + x}$	1	1,4142	1,7321

3. Dada la tabla de la función f(x):

x	-1	1	2	3
$f(x)$	1	1	7	25

a) ¿Existe algún polinomio de grado tres que tome esos valores?
b) En caso afirmativo, calcula los valores de f(x) interpolando para $x = 0$ y extrapolando para $x = 5$.

4. Sucesiones numéricas y sucesiones de diferencias.
Una estrategia muy útil para encontrar el término general de una sucesión, o el polinomio de interpolación de una función de la que conocemos las imágenes de valores naturales consecutivos, es estudiar las sucesiones que se obtienen al hallar las diferencias sucesivas entre los términos.

Sucesión	3		8		15		24		35
Primera diferencia		5		7		9		11	
Segunda diferencia			2		2		2		

Al ser las segundas diferencias constantes, esto nos indica que la sucesión original tiene por término general un polinomio de grado 2, $a_n = an^2 + bn + c$, cuyos coeficientes podemos calcular dando valores y resolviendo el sistema.
Dando a n los valores 1, 2 y 3, y resolviendo el sistema, tenemos $a = 1$, $b = 2$, $c = 0 \Rightarrow a_n = n^2 + 2n$.

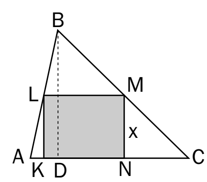
a) Calcula los términos generales de la sucesión: 6 10 16 24 34 ...
b) ¿De qué grado es el mejor polinomio de interpolación de la siguiente función tabulada? Calcula P(6,5) y P(0,5).

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	5	19	49	101

5. Una especie de aves emigra de la zona A a la zona B. La distancia entre ambas zonas es de 1 000 km. Suponemos que la zona A de partida corresponde al kilómetro $x = 0$ y la zona B de destino al kilómetro $x = 1\,000$ de la ruta. Al principio y al final de la ruta se encuentran diversas fuentes de alimentación, pero, a lo largo de la ruta, las aves solo encuentran alimento en el kilómetro $x = 400$.
Representa la función f(x) que describe la distancia del kilómetro x de la ruta a la fuente de alimentación más cercana y en qué punto del recorrido se alcanza la máxima distancia a una fuente de alimento.

6. Considera el conjunto formado por los intervalos [0, 1] y [2, 3] y un punto x del eje OX. Halla la expresión analítica de la función d(x) que representa la distancia mínima del punto x a uno de estos intervalos.

7. En el triángulo ABC de la figura, cuya base $AC = b$ y su altura $BD = h$, está inscrito un rectángulo KLMN, cuya altura es $NM = x$.
Expresa el perímetro P del rectángulo KLMN y su área S en función de x e indica el dominio de estas funciones.



8. Un trapecio rectángulo tiene sus ángulos rectos en los vértices A y B. Sus bases son $AD = a$ y $BC = b$, con $a > b$. Se toma un punto M entre A y D y se traza la recta MN paralela a AB tal que la distancia $AM = x$. Expresa el área S(x) de la figura ABNMA.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $[-1,1)$

b) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

c) $[-1, +\infty)$

2. $y = ax + b$. Conocemos $\begin{cases} 1 = a \cdot 0 + b \\ 1{,}4142 = a \cdot 1 + b \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $y = 0{,}4142x + 1$

$\sqrt{1 + x} = \sqrt{1{,}6} \Rightarrow x = 0{,}6$, interpolando este valor

$y = 0{,}4142 \cdot 0{,}6 + 1 = 1{,}24852$

3. a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 7 \\ f(3) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = 25 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$f(x) = x^3 - x + 1$

b) $f(0) = 1$ y $f(5) = 121$

4. a)

Sucesión	6		10		16		24		34
Primera diferencia		4		6		8		10	
Segunda diferencia			2		2		2		

Término general $a_n = an^2 + bn + c$:

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_2 = 10 \\ a_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 10 \\ 9a + 3b + c = 16 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $a_n = n^2 + n + 4$

b)

f(x)	1		5		19		49		101
Primera diferencia		4		14		30		52	
Segunda diferencia			10		16		22		
Tercera diferencia				6		6			

El mejor polinomio es de grado 3:

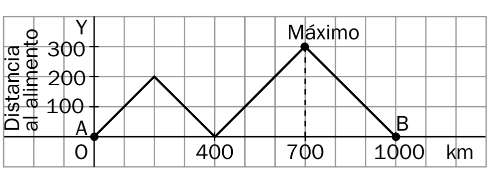
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; conocemos

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(2) = 5 \\ P(3) = 19 \\ P(4) = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 19 \\ 64a + 16b + 4c + d = 49 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $P(x) = x^3 - x^2 + 1$

$P(6, 5) = 233{,}375$ y $P(0, 5) = 0{,}875$

5.



6. $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 1{,}5 \\ 2 - x & \text{si } 1{,}5 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

7. Los triángulos LBM y ABC son semejantes:

$$\frac{AC}{LM} = \frac{BD}{BD - LK} \Rightarrow \frac{b}{LM} = \frac{h}{h - x}$$

El ancho del rectángulo es $LM = \dfrac{b(h - x)}{h}$

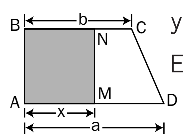
$$P = P(x) = 2\left[\frac{b(h - x)}{h} + x\right] = 2b + 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x$$

$$S = S(x) = \frac{b(h - x)}{h} \cdot x = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

El dominio de $P(x)$ y de $S(x)$ es el intervalo $(0, h)$.

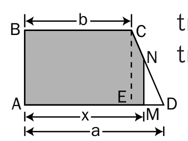
8. Para determinar la función $S(x)$ que expresa el área en función de x hay que distinguir dos casos:

1. $0 < x \leqslant b$ Es un rectángulo con base $AM = x$ y altura $AB = h$.



El área es $S(x) = xh$.

2. $b < x \leqslant a$ El área buscada es el área del trapecio ABCD menos el área del triángulo MND.



Los triángulos ECD y MND son semejantes:

$$\frac{EC}{MN} = \frac{ED}{MD} \Rightarrow \frac{h}{MN} = \frac{a - b}{a - x} \Rightarrow MN = \frac{h(a - x)}{a - b}$$

$$S(x) = \frac{a + b}{2}h - \frac{1}{2}(a - x)\frac{h(a - x)}{a - b} =$$

$$= \frac{1}{2}h\left(a + b - \frac{(a - x)^2}{a - b}\right)$$

La función $S(x)$ es, por tanto:

$$S(x) = \begin{cases} xh & \text{si } 0 < x \leqslant b \\ \dfrac{1}{2}h\left(a + b - \dfrac{(a - x)^2}{a - b}\right) & \text{si } b < x \leqslant a \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

13 Funciones: límites y continuidad

1. Calcula el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \text{sen}^2\, x}{\text{sen}\, x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x - \text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, x}$

2. Calcula el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}$

3. La función g(x) toma los valores $\dfrac{|x^3 - x|}{x}$ para $0 < x \leqslant 1$ y es continua en el intervalo [0, 1].

a) ¿Cuánto vale g(0)?
b) ¿Puede ser continua la función g(x) en el intervalo [−1, 1] para algún valor de g(0)?

4. Obtén de manera razonada dos funciones que no sean continuas en un cierto punto $x = a$ de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.

5. Determina cuál debe ser el valor del parámetro k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 - \cos x) \cdot \text{sen}\, x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

6. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla los siguientes requisitos:

- Dominio $\mathbb{R} - \{-3,1\}$
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 5$
- Los límites laterales en $x = -1$ son finitos pero distintos.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leqslant 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

8. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx + k - 1 & \text{si } x < 2 \\ \text{sen}\, \pi x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ según los valores del parámetro k.

9. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

10. Halla el dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$, sabiendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 6$.

11. ¿Qué relación debe existir entre los parámetros a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales?

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \text{sen}^2\, x}{\text{sen}\ x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}\ x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\ x}{\text{sen}\ x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\ 5x - \text{sen}\ 3x}{\text{sen}\ x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\ 5x}{\text{sen}\ x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\ 3x}{\text{sen}\ x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x} = 5 - 3 = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \dfrac{1}{3}$

3. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x^3 - x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-(x^3 - x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1$

Como g es continua en [0, 1], $g(0) = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x^3 - x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3 - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = -1$

No puede ser continua en [−1, 1], ya que los límites laterales en $x = 0$ son distintos; la función $g(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

4. Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ no son continuas en

$x = 0$; sin embargo, la función suma sí lo es:

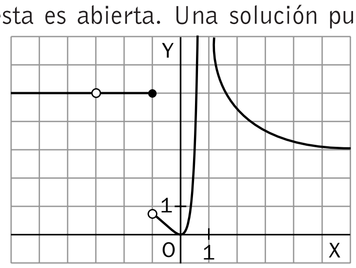
$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. $k = f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)\cdot \text{sen}\, x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} =$

$= 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow k = 0$

6. La respuesta es abierta. Una solución puede ser:



7. Posibles puntos de discontinuidad $x = 1$ y $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$;

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x = 2$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (4 - x) = 2$;

$f(2) = 2$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

8. Los dos trozos de la función son continuos en sus intervalos. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$.

$f(2) = \text{sen}\ 2\pi = 0$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \text{sen}\ \pi x = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 + kx + k - 1) = 3 + 3k$

Para que sea continua debe ser:

$3 + 3k = 0 \Rightarrow k = -1$

Si $k = -1$, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Si $k \neq -1$, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

9. Posibles puntos de discontinuidad $x = -1$ y $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} |x + 2| = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = 1$

$f(-1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x + 1) = 3$;

$f(1) = 1$

La función es discontinua en $x = 1$.

10. $6 = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2kx + 1}{x - k} = 2k \Rightarrow k = 3$

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{3\}$.

11. En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 + bx - 1) =$

$= a + b - 1 = f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2bx - 2) = 2b - 2$

Para que sea continua en $x = 1$:

$a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow a = b - 1$

www.yoquieroaprobar.es

14 Derivadas

1. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en el intervalo $\left[\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right]$.

2. Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x - 2)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

3. De una función polinómica de grado dos, $P(x)$, se conocen las siguientes características:

- Su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
- El punto $(1, 1)$ pertenece a la gráfica de la función.
- La recta tangente a la gráfica de la función en $(1, 1)$ es paralela a la recta $3x + y = 0$.

Obtén la expresión de la función $P(x)$.

4. Desde el punto $A(0, -3)$ se trazan dos rectas que son tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2 + 4$. Calcula las ecuaciones de esas rectas y obtén los puntos de tangencia.

5. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$. En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Si el desplazamiento de la partícula es de izquierda a derecha, obtén el punto P en que la partícula se encuentra en el eje OX.

6. La carga eléctrica q (en culombios) que pasa por la sección transversal de un conductor varía en función del tiempo según la expresión $q(t) = 3t^2 + 2t$. Halla la intensidad de la corriente a los cinco segundos.

7. Halla la derivada de la función $f(x) = x \cdot |x|$.

8. Halla la derivada de la función $f(x) = (x + 1) \cdot |x|$.

9. Sea $g(x)$ una función continua en $x = 0$ y sea $f(x) = x \cdot g(x)$. Demuestra que la función f es derivable en $x = 0$ y calcula el valor de $f'(0)$ en términos de la función g.

10. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en el conjunto de los números reales.

11. ¿Cómo se deben elegir los coeficientes a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c \end{cases}$ sea continua y derivable en el punto $x = c$?

12. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y de b para que f sea continua en todos los números reales.

b) Estudia en qué puntos es derivable la función f.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $\text{TVM}_{\left[\frac{2}{\pi},\frac{6}{\pi}\right]} = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{6}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - 1}{\dfrac{4}{\pi}} = -\dfrac{\pi}{8}$

2. $f'(2) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+h)^2 \operatorname{sen} h}{h} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} (2 + h)^2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 4$

3. $P(x) = ax^2 + bx + c$; conocemos:

$P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$P(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1$ y $P'(1) = -3$

Además: $P'(1) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = -3$

$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -4, \quad b = 5$

$P(x) = -4x^2 + 5x$

4. Rectas que pasan por $A(0, -3)$: $y = mx + 3$

Los puntos de tangencia son de la forma $(a, a^2 + 4)$ y pertenecen a la tangente:

$a^2 + 4 = m \cdot a + 3$

$f'(a) = m \Rightarrow 2a = m$

Por tanto: $a^2 + 4 = 2a \cdot a + 3 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Si $a = 1$, el punto de tangencia es $(1, 5)$ y la ecuación de la tangente $y = 2x + 3$.

Si $a = -1$ el punto de tangencia es $(-1, 5)$ y la ecuación de la tangente $y = -2x + 3$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$, $f'(2) = \dfrac{10}{9}$

Recta tangente: $10x - 9y - 32 = 0$

b) $\begin{cases} y = 0 \\ 10x - 9y - 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{16}{5} \Rightarrow P\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$

6. $I_5 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{q(5 + h) - q(5)}{h} = 32$ amperios.

7. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Es derivable en $x = 0$: $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. No es derivable en $x = 0$, ya que $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\,g(h) - 0\,g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} g(h)$

Como g es continua en $x = 0$, $f'(0) = g(0)$.

10. Es derivable en todos los números reales, excepto, quizá, en $x = 1$.

Para que sea continua en $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow a - b = -1$

Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales deben coincidir:

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a + b = 2b \Rightarrow 2a - b = 0$

$\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \quad b = 2$

11. $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow c^2 = ac + b$

Además: $f'(c^-) = f'(c^+) \Rightarrow 2c = a$

$\begin{cases} a = 2c \\ c^2 = ac + b \end{cases} \Rightarrow a = 2c, \quad b = -c^2$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant c \\ 2cx - c^2 & \text{si } x > c \end{cases}$

12. a) Los posibles puntos de discontinuidad son $x = 0$ y $x = 2$.

Para que sea continua en $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 2 = \sqrt{b}$

Para que sea continua en $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \sqrt{2a + b} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\begin{cases} \sqrt{b} = 2 \\ \sqrt{2a + b} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a = -1, \quad b = 4$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{4 - x} & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = -\dfrac{1}{2}$

$f'(2^-) = f'(2^+) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

La función es derivable en todos los números reales, excepto en $x = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

15 Operaciones y cálculos con derivadas

1. Calcula la siguiente derivada: $D(2\ \text{sen}\ x + \text{sen}\ 2x + \text{sen}\ x^2 + \text{sen}^2\ x + \text{sen}^2\ x^2)$.

2. Calcula la derivada de la función $f(x) = x + x^x$ $(x > 0)$.

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones y expresa el resultado de la forma más simple posible:

a) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ b) $f(x) = L\left(\dfrac{e^x + x}{e^x - x}\right)$ c) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{\text{sen}\ x + \cos x}{\text{sen}\ x - \cos x}\right)$

4. Calcula la derivada de la función $f(x) = (\text{sen}\ x)^{\cos x} + (\cos x)^{\text{sen}\ x}$.

5. Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{(Lx)^x}{x^{Lx}}$ aplicando la derivación logarítmica.

6. ¿En qué punto es tangente a la gráfica de la curva $f(x) = x^2 + 3x - 1$ una recta que es perpendicular a la recta $x + 2y - 3 = 0$?

7. Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = L(\text{tg}\ 2x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{8}$.

8. Calcula el área del cuadrado ABCD sabiendo que uno de sus vértices es el origen de coordenadas y que uno de sus lados está sobre la recta normal en el punto de abscisa $x = 0$ a la gráfica de la función $f(x) = e^{2x} + x^2$. Ten en cuenta que la recta normal a una curva en un punto es la recta perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto.

9. ¿Qué función verifica que al hallar sus derivadas sucesivas cada una resulta ser triple que la anterior?

10. Obtén la derivada primera, segunda, tercera y cuarta de la función $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$. ¿Cuál sería la expresión general de la derivada n-ésima de esta función?

11. Obtén la derivada primera, segunda, tercera y cuarta de la función $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. ¿Cuál sería la expresión general de la derivada n-ésima de esta función?

12. Obtén la expresión general de la derivada n-ésima de las funciones $f(x) = \text{sen}\ x$ y $f(x) = \cos x$.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $D(2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } x^2 + \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x^2) =$
$= 2 \cos x + 2 \cos 2x + 2x \cos x^2 + 2 \text{ sen } x \cos x +$
$+ 4x \text{ sen } x^2 \cos x^2$

---

2. $Df(x) = 1 + (1 + Lx) \cdot x^x \qquad (x > 0)$

---

3. a) $$Df(x) = \frac{\dfrac{2e^x}{(3^x + 1)^2}}{1 + \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

b) $$Df(x) = \frac{\dfrac{2e^x (1 - x)}{(e^x - x)^2}}{\dfrac{e^x + x}{e^x - x}} = \frac{2e^x (1 - x)}{e^{2x} - x^2}$$

c) $$Df(x) = \frac{\dfrac{-2 (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(\text{sen } x - \cos x)^2}}{1 + \left(\dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}\right)^2} =$$
$$= \frac{-2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)} = -1$$

---

4. $$Df(x) = \left[-\text{sen } x \cdot L(\text{sen } x) + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right] \cdot (\text{sen } x)^{\cos x} +$$
$$+ \left[\cos x \cdot L(\cos x) + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right] \cdot (\cos x)^{\text{sen } x}$$

---

5. Tomamos logaritmos:

$$Lf(x) = L\frac{(Lx)^x}{x^{Lx}} = L(Lx)^x - Lx^{Lx} = x \cdot L(Lx) - Lx \cdot Lx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Lf(x) = x \cdot L(Lx) - (Lx)^2$$

Derivamos en ambos miembros:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = L(Lx) + \frac{1}{Lx} - \frac{2Lx}{x}$$
$$f'(x) = \left[L(Lx) + \frac{1}{x} - \frac{2Lx}{x}\right] \cdot \frac{(Lx)^x}{x^{Lx}}$$

---

6. Las rectas perpendiculares a la recta dada tienen por pendiente $m = 2$ y $Df(x) = 2x + 3$.

$$2x + 3 = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Punto de tangencia: $\left(-\dfrac{1}{2}, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

---

7. $$Df(x) = \frac{2(1 + \text{tg}^2 2x)}{\text{tg } 2x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\left(1 + \text{tg}^2 \dfrac{\pi}{4}\right)}{\text{tg } \dfrac{\pi}{4}} = 4$$

$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = L \text{ tg } \dfrac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow$ Punto de tangencia: $\left(\dfrac{\pi}{8}, 0\right)$

Recta tangente: $y = 4\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) \Rightarrow y = 4x - \dfrac{\pi}{2}$

---

8. Calculamos la recta normal. Su pendiente será:

$m = -\dfrac{1}{f'(0)}$

$Df(x) = 2e^{2x} + 2x \Rightarrow f'(0) = 2 \Rightarrow m - \dfrac{1}{2}$

$f(0) = 1$. La recta normal es:

$y - 1 = -\dfrac{1}{2} x \Rightarrow x + 2y - 2 = 0$

Como el origen no pertenece a esta recta, es un vértice opuesto a ese lado y, por tanto, la distancia entre el origen y la recta normal es la longitud del lado del cuadrado. La distancia del origen a la recta es: $d = \dfrac{|-2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ Área $= \dfrac{4}{5}$ u^2

---

9. La función $f(x) = 3^{3x}$ verifica esta condición.

$f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$; $f''(x) = 3^2e^{3x} = 3f'(x)$;
$\ldots f^{n)}(x) = 3f^{n-1)}(x)$

---

10. $f(x) = (x + 1)^{-1}$;

$f'(x) = -(x + 1)^{-2}$; $f''(x) = 2(x + 1)^{-3}$;

$f'''(x) = -6(x + 1)^{-4}$; $f^{4)}(x) = 24(x + 1)^{-5}$

$f^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot n! \cdot (x + 1)^{-(n+1)}$

---

11. $f(x) = x \cdot (x - 1)^{-1}$;

$f'(x) = -(x - 1)^{-2}$; $f''(x) = 2(x - 1)^{-3}$;

$f'''(x) = -6(x - 1)^{-4}$; $f^{4)}(x) = -24(x + 1)^{-5}$

$f^{n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x - 1)^{-(n+1)}$

---

12. $$D^n \text{ sen } x = \begin{cases} (-1)^m \text{ sen } x & \text{si } n = 2m \\ (-1)^{m+1} \cos x & \text{si } n = 2m - 1 \end{cases}$$

$$D^n \cos x = \begin{cases} (-1)^m \text{ sen } x & \text{si } n = 2m - 1 \\ (-1)^{m+1} \cos x & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es

16 Monotonía y curvatura

1. Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ y estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

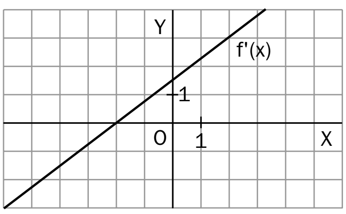
2. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

a) Halla los puntos en los que f(x) es derivable.

b) Estudia si existen máximos y mínimos relativos de la función f(x).

3. Estudia los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

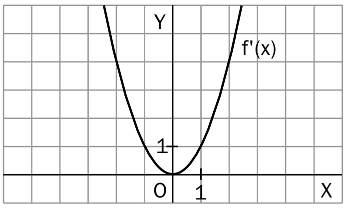
4. La siguiente gráfica corresponde a la función f′(x), primera derivada de una determinada función f(x).



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f(x) interpretando la gráfica de f′(x).

b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f(x) utilizando solamente la gráfica de f′(x).

5. La siguiente gráfica corresponde a la función f′(x), primera derivada de una determinada función f(x).



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f(x) interpretando la gráfica de f′(x).

b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f(x) utilizando solamente la gráfica de f′(x).

6. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$. Calcula a, b y c sabiendo que f no tiene un extremo relativo en $x = 1$.

7. ¿En qué punto de la curva $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ es máxima la pendiente de la recta tangente?

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 2) y corta a los ejes de coordenadas determinando, en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

9. Desde una casa situada en el punto P(7, 0) se quiere hacer un camino recto para conectarla con una carretera cuyo trazado viene dado por la curva de ecuación $y = \sqrt{1 + 2x + 2x^2}$. ¿En qué punto de la carretera conectará el camino más corto posible?

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \leqslant 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

Dominio $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \leqslant 0 \text{ y } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

En $x = 0$ la función es derivable, ya que las derivadas laterales coinciden. $f'(x)$ es positiva en todo el dominio; por tanto, $f(x)$ es creciente en todo el dominio.

2. a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

El dominio es $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En $x = 0$ la función es derivable, ya que las derivadas laterales coinciden.

En $x = 1$ y $x = 2$ la función no es derivable, ya que las derivadas laterales son distintas.

b) La función tiene un máximo relativo en $x = 2$, aunque no es derivable en ese punto.

3. Dominio $\mathbb{R}$. $f'(x) = e^{-x} \cdot x \cdot (2 - x)$

$f'(x)$ se anula en $x = 0$ y en $x = 2$.

$f''(x) = e^{-x} \cdot (x - 2)^2$, sustituyendo $f''(0) = 4 > 0$, luego $(0, 0)$ es un mínimo relativo; $f''(2) = 0$, pero estudiando el signo de f' vemos que el punto $(2, 4e^{-2})$ es un máximo relativo.

4. a) $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ $(f'(x) < 0)$ y creciente en $(-2, +\infty)$ $(f'(x) > 0)$.

$f(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es creciente $(f''(x) > 0)$, la función $f(x)$ es convexa; no tiene puntos de inflexión, ya que no cambia la curvatura.

5. a) $f(x)$ es creciente, ya que $f'(x)$ es siempre positiva $f(x)$ no tiene extremos relativos.

b) $f'(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ $(f''(x) < 0)$; por tanto, la función es cóncava en ese intervalo.

$f'(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ $(f''(x) > 0)$; por tanto, la función es convexa en ese intervalo.

6. Como $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$.

Además: $f''(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$

Como $x = 1$ no es un extremo relativo, debe ser un punto de inflexión:

$f''(x) = 6x + 2a$ y $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema: $a = -3$, $b = 3$, $c = 0$.

La función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

7. La función que queremos maximizar es la pendiente de la tangente $p(x) = f'(x) = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$.

Buscamos los valores que anulan $p'(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como $p''\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, la pendiente máxima se alcanza en $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8. La recta es de la forma $y - 2 = m(x - 3)$.

Corte con los ejes: $\left(3 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$ y $(0, 2 - 3m)$.

El área del triángulo depende de la pendiente m:

$A(m) = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{2}{m}\right) \cdot (2 - 3m)$

$A'(m) = -9 + \dfrac{4}{m^2}$ se anula en $m = \pm\dfrac{2}{3}$.

Como $A''\left(-\dfrac{2}{3}\right) > 0$, el área es mínima para $m = -\dfrac{2}{3}$. La recta buscada es: $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 3)$.

9. Debemos minimizar la distancia entre P y Q, siendo Q(x, y) el punto de contacto:

$d(P, Q) = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2}$

Como Q pertenece a la curva:

$d(P, Q) = \sqrt{(x - 7)^2 + (\sqrt{1 + 2x + 2x^2})^2} =$

$= \sqrt{(x - 7)^2 + 1 + 2x + 2x^2}$

Minimizar esta función es igual que minimizar su cuadrado:

$d(x) = (x - 7)^2 + 1 + 2x + 2x^2 = 3x^2 - 12x + 50$

$d'(x) = 6x - 12$ se anula en $x = 2$, punto en el que se alcanza el mínimo, ya que $d''(2) > 0$.

El punto buscado es $Q(2, \sqrt{13})$.

www.yoquieroaprobar.es

17 Estudio y representación de funciones

1. Halla las asíntotas de las siguientes funciones y comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función, calculando el punto de corte:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 8}{x^3 + x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x - 2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

2. Representa gráficamente la función $f(x) = x + \text{sen } x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

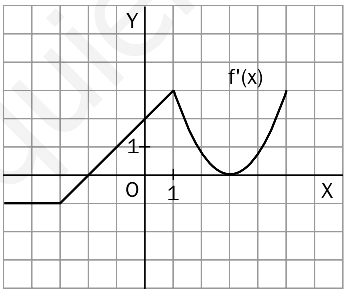
3. Representa gráficamente la función $f(x) = \cos x + \text{sen } x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4. Representa gráficamente la función $f(x) = \text{sen } x \cdot e^x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

5. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x}{Lx}$.

6. Representa gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^x$.

7. Estudia el comportamiento de la función $f(x)$ en el intervalo $[-5, 5]$ y representa esta función de forma aproximada sabiendo que su derivada tiene la siguiente gráfica:



8. Demuestra que para cualquier función polinómica de grado tres, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se verifica que:

a) Si la derivada $f'(x)$ se anula en dos puntos x_1 y x_2, la función tiene un punto de inflexión en $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

b) Si la derivada $f'(x)$ se anula en un único punto x_0, ese punto es un punto de inflexión.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) El denominador se anula cuando:

$x^3 + x^2 = x^2 (x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$x = 0$ es asíntota vertical.

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

No hay puntos de corte con la asíntota.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$x = 0$ es asíntota vertical cuando $x \to 0^-$.

(0, 0) es punto de corte con la asíntota.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$x = 2$ es asíntota vertical.

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

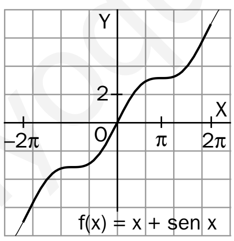
(0, 0) y (1, 0) son puntos de corte con la asíntota.

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

No hay puntos de corte con la asíntota.

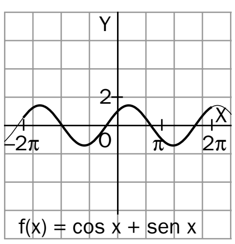
2. $f'(x) = 1 + \cos x$

$f''(x) = -\text{sen } x$



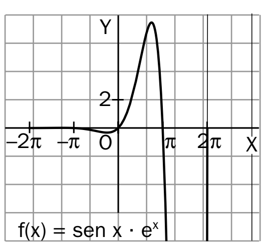
3. $f'(x) = -\text{sen } x + \cos x$

$f''(x) = -(\cos x + \text{sen } x)$



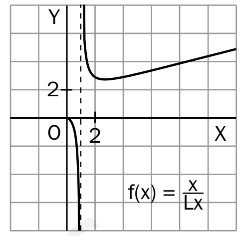
4. $f'(x) = (\cos x + \text{sen } x)\, e^x$

$f''(x) = 2 \cos x \cdot e^x$



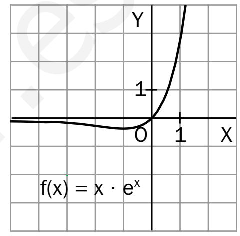
5. $f'(x) = \dfrac{Lx - 1}{(Lx)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2 - Lx}{x(Lx)^3}$



6. $f'(x) = e^x (x + 1)$

$f''(x) = e^x (x + 2)$



7. $f'(x)$ es negativa y constante en $(-5, -3) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ es decreciente y lineal.
$f'(x)$ es negativa y creciente en $(-3, -2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ es decreciente y convexa.
$f'(x)$ es positiva y creciente en $(-2, 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ es creciente y convexa.
$f'(x)$ es positiva y decreciente en $(1, 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ es creciente y cóncava.
$f'(x)$ es positiva y creciente en $(3, 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ es creciente y convexa.
$f'(-2) = 0 \Rightarrow (-2, f(-2))$ es un mínimo relativo.
$(1, f(1))$ y $(3, f(3))$ son puntos de inflexión.

8. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\ f''(x) = 6ax + 2b$

a) x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$$

$$f''\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 6a\,\frac{x_1 + x_2}{2} + 2b =$$

$$= 3a\left(-\frac{2b}{3a}\right) + 2b = -2b + 2b = 0$$

$$f'''\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 6a \neq 0$$

En $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ hay un punto de inflexión.

b) x_0 es solución doble de la ecuación

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{2b}{6a}$$

$$f''(x_0) = 6ax_0 + 2b = 6a\left(-\frac{2b}{6a}\right) + 2b = -2b + 2b = 0$$

$$f'''(x_0) = 6a \neq 0$$

En $x = x_0$ hay un punto de inflexión.

www.yoquieroaprobar.es

18 Integrales indefinidas

1. Calcula una función f(x) cuya derivada sea $f'(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + x^3 + 1}{x^4}$ y tal que para $x = 1$ tome el valor $f(1) = -1$. Encuentra el valor de dicha función para $x = -1$.

2. Recordando la definición de primitiva de una función, demuestra la siguiente igualdad:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{\text{arcsen } x}{2}$$

3. Calcula algún valor de a para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + 2 \text{ arcsen } \frac{x}{a}$$

4. a) Recordando la fórmula que proporciona el coseno del ángulo doble, demuestra que:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

b) Con la ayuda de la fórmula anterior, calcula:

$$\int \text{sen}^2 x\, dx$$

5. Calcula la expresión de una función $y = F(x)$ que verifique las siguientes condiciones:

i) $(2x^2 + 1) \cdot F''(x) = 12x^3 - 8x^2 + 6x - 4$

ii) $F(2) = 3$ y $F'(2) = 4$

6. Considera el polinomio $P(x) = x^2 - 4x + 8$.

a) Escribe el polinomio en la forma $P(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$, donde α y β son dos números reales.

b) Dividiendo por β tanto el numerador como el denominador de la fracción algebraica $\dfrac{1}{P(x)}$, escríbela en la forma $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{\frac{1}{\beta}}{(q(x))^2 + 1}$, donde q(x) es un polinomio de primer grado.

c) Con la ayuda del apartado anterior, y recordando las integrales de tipo arco tangente, calcula:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\, dx$$

7. a) Comprueba que $\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \dfrac{A + B}{2} \cos \dfrac{A - B}{2}$ teniendo en cuenta que:

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$ y que $\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b$

(Solo hay que realizar los cambios de variables $a + b = A$ y $a - b = B$.)

b) Con la ayuda del apartado anterior, demuestra que $\text{sen } mx \cdot \cos nx = \dfrac{1}{2} [\text{sen}(m + n)x + \text{sen}(m - n)x]$.

c) Calcula el valor de la integral $\int \text{sen } 3x \cos 2x\, dx$.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $f(x) = \int \frac{x^4 + x^2 + x^3 + 1}{x^4} dx =$

$= \int \left(1 + x^{-2} + \frac{1}{x} + x^{-4}\right) dx = x - \frac{1}{x} + L|x| - \frac{1}{3x^3} + C$

$f(1) = -1 \Rightarrow 1 - 1 + L1 - \frac{1}{3} + C = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -\frac{2}{3}$

Por tanto, la función f(x) es:

$f(x) = x - \frac{1}{x} + L|x| - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{3}$

$f(-1) = -\frac{1}{3}$

2. $D\left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{\text{arcsen } x}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{1 - x^2 - x^2 + 1}{2\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2}$

3. $D\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + 2 \text{ arcsen } \frac{x}{a}\right) =$

$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{x \cdot (-2x)}{4\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{\frac{2}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} =$

$= \frac{a^2 + 4 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{8 - 2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 4 = 8 \\ a^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2$

4. a) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

b) $\int \text{sen}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4}$

5. $F'(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 6x - 4}{2x^2 + 1} dx =$

$= \int (6x - 4)dx = 3x^2 - 4x + c$

$F(x) = \int (3x^2 - 4x + c)dx = x^3 - 2x^2 + cx + d$

$F(2) = 3 \text{ y } F'(2) = 4 \Rightarrow \begin{cases} 8 - 8 + 2c + d = 3 \\ 12 - 8 + c = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 0, \ d = 3 \Rightarrow F(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

6. a) $P(x) = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 - 4 + 8 =$
$= (x - 2)^2 + 4$

b) $\frac{1}{x^2 - 4x + 8} = \frac{1}{(x - 2)^2 + 4} =$

$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1}$

c) $\int \frac{1}{x^2-4x+8} dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+1} dx =$

$= \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{arctg}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

7. a) $\begin{cases} a + b = A \\ a - b = B \end{cases} \Rightarrow a = \frac{A + B}{2}, \quad b = \frac{A - B}{2}$

$\text{sen } A + \text{sen } B = \text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) =$

$= 2 \text{ sen } a \cos b = 2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$

b) $\begin{cases} \frac{A + B}{2} = mx \\ \frac{A - B}{2} = nx \end{cases} \Rightarrow A = (m + n)x, \ B = (m - n)x$

$\text{sen } mx \cdot \cos nx = \text{sen } \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} =$

$= \frac{1}{2}[\text{sen } A + \text{sen } B] = \frac{1}{2}[\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x]$

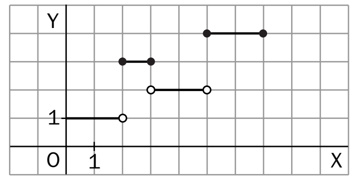
c) $\int \text{sen } 3x \cdot \cos 2x \, dx =$

$= \frac{1}{2}\int \text{sen } 5x \, dx + \frac{1}{2}\int \text{sen } x \, dx = \frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2}$

www.yoquieroaprobar.es

19 Área bajo una curva. Integral definida

1. Dada la siguiente gráfica $y = f(x)$:

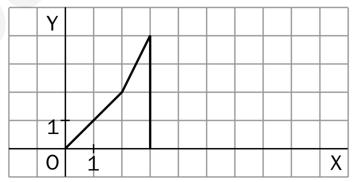


a) Escribe la ecuación de la función.
Ten en cuenta que esta función está solo definida en el intervalo [0, 7].

b) Consideramos la nueva función $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ con $0 \leqslant t \leqslant 7$, que, como sabes, representa el área limitada por la función anterior, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = t$. Escribe la ecuación de esta nueva función.

c) Dibuja la función definida en el apartado anterior.

2. Dada la gráfica siguiente:



a) Escribe la ecuación $y = f(x)$ de la función representada.
Ten en cuenta que dicha función está solo definida en el intervalo [0, 3].

b) Consideramos la nueva función $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ con $0 \leqslant t \leqslant 3$ que representa el área limitada por la función anterior, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = t$. Escribe la ecuación de esta nueva función.

c) Calcula el valor de la expresión $F\left(\frac{5}{2}\right) - F(1)$.

3. Consideramos la función $y = f(x) = |2x - 2|$:

a) Escribe otra ecuación equivalente a la anterior pero definida a trozos.

b) Calcula el valor $\int_0^2 |2x - 2|\,dx$.

4. Consideramos la función $y = f(x) = |x^2 - 4x + 3|$:

a) Escribe otra ecuación equivalente a la anterior pero definida a trozos.

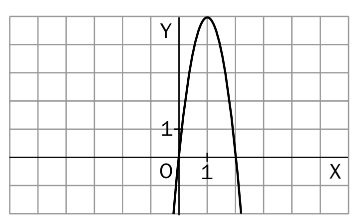
b) Representa la función $y = f(x)$.

c) Calcula el valor $\int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\,dx$.

5. a) Dibuja la parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ y la curva $y = 2\sqrt{x}$ y determina los puntos de corte de las funciones dibujadas.

b) Calcula el área limitada por las dos funciones.

6. El eje de la parábola de la figura es paralelo al eje de ordenadas.



a) Calcula la ecuación de la parábola sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y su vértice está situado en el punto (1, 4).

b) Calcula el área que delimitan la parábola y el eje de abscisas.

www.yoquieroaprobar.es

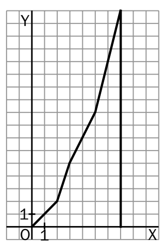
SOLUCIONES

1. a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

b) $F(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2 + 3 \cdot (t - 2) & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 + 3 + 2 \cdot (t - 3) & \text{si } 3 < x < 5 \\ 9 + 4 \cdot (t - 5) & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 3t - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2t - 1 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 4t - 11 & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$

c)



2. a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x - 2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

b) $F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ 2 + \dfrac{(2 + 2t - 2) \cdot (t - 2)}{2} & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$

$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ t^2 - 2t & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$

c) $F\left(\dfrac{5}{2}\right) - F(1) = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

3. a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } 2x - 2 \geqslant 0 \\ -2x + 2 & \text{si } 2x - 2 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geqslant 1 \\ -2x + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_0^2 |2x - 2|\, dx =$

$= \displaystyle\int_0^1 (-2x + 2)dx + \int_1^2 (2x - 2)dx =$

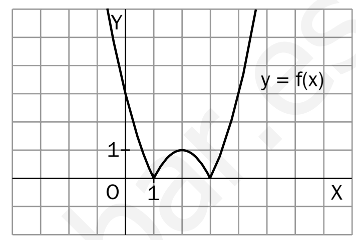
$= [-x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 =$

$= (-1 + 2) + (4 - 4 - 1 + 2) = 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$

4. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

b)



c) $\displaystyle\int_0^2 |x^2 - 4x + 3|\, dx =$

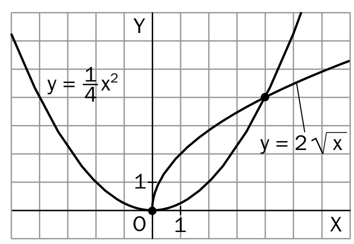
$= \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)dx =$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[-\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^2 =$

$= \left(\dfrac{1}{3} - 2 + 3\right) + \left(-\dfrac{8}{3} + 8 - 6 + \dfrac{1}{3} - 2 + 3\right) =$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2 \text{ u}^2$

5. a)



b) $S = \displaystyle\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \dfrac{x^2}{4}\right) dx = \left[\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3} - \dfrac{x^3}{12}\right]_0^4 =$

$= \dfrac{32 - 16}{3} = \dfrac{16}{3} \text{ u}^2$

6. a) Sea $y = ax^2 + bx + c$ la ecuación de la parábola: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = 8$

$y = -4x^2 + 8x$

b) $S = \displaystyle\int_0^2 (-4x^2 + 8x)dx = \left[-\dfrac{4x^3}{3} + 4x^2\right]_0^2 =$

$= -\dfrac{32}{3} + 16 = \dfrac{16}{3} \text{ u}^2$

www.yoquieroaprobar.es

20 Distribuciones unidimensionales y bidimensionales

1. Una persona se somete a una dieta de adelgazamiento durante 5 semanas con los resultados que se recogen en la siguiente tabla:

N.º de semanas	1	2	3	4	5
Peso (kg)	70	68,5	67	66	65

a) Estudia el tipo de correlación que presentan ambas variables.
b) ¿Qué peso podemos suponer que alcanzará esta persona si sigue con la dieta dos semanas más?
c) ¿Es razonable intentar predecir el peso que tendría al cabo de seis meses?

2. En una variable bidimensional (X,Y) las rectas de regresión vienen dadas por las ecuaciones $4y + x - 6 = 0$ (recta de regresión de Y sobre X) e $y + 2x - 5 = 0$ (recta de regresión de X sobre Y).
a) Obtén los valores de las medias de las distribuciones marginales.
b) Halla el valor del coeficiente de correlación.

3. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de aspirantes a pilotos de aviación comercial en dos pruebas en las que se trataba de medir la velocidad de reacción y la destreza manual fueron las siguientes:

Destreza manual \ Velocidad de reacción	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[40-50)
[0-10)	5	3	0	0
[10-20)	2	6	1	0
[20-30)	0	1	4	2
[30-40)	0	0	3	3
[40-50)	0	0	1	2

a) ¿Qué puntuación en destreza manual se espera encontrar en un aspirante calificado con 32 en la prueba de velocidad de reacción?
b) ¿Qué puntuación se espera encontrar en velocidad de reacción si el aspirante ha obtenido 19 en la prueba de destreza manual?
c) ¿Cómo de fiables son las predicciones anteriores?

4. En un estudio realizado para determinar la rapidez de desecación de un compuesto orgánico destinado a jardinería se han observado las variables «número de días transcurridos desde el riego» (X) y «porcentaje de humedad del compuesto» (Y), obteniéndose los siguientes datos:

X	1	2	3	4	5
Y	90	80	70	50	30

a) ¿Qué grado de humedad se espera encontrar a los siete días del riego?
b) ¿Cuántas horas han de transcurrir desde el momento del riego para que el grado de humedad del compuesto sea del 50 %?

5. A partir de una variable estadística bidimensional que toma valores (x_i, y_i), $i = 1...n$, con frecuencia igual a 1, se construye una nueva variable $z_i = x_i \cdot y_i$. Comprueba que:
a) Si $\overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{y}$, el coeficiente de correlación de Pearson es $r_{xy} = 0$.
b) Recíprocamente, si $r_{xy} = 0$, entonces $\overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

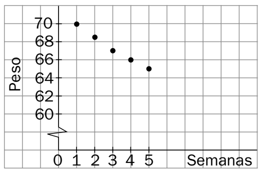
www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $\overline{x} = 3$ $\quad \overline{y} = 67,3$

$S_x = 1,41$, $\quad S_y = 1,78$, $S_{xy} = -2,5$

$r = -0,994$



A la vista del diagrama de dispersión y del valor del coeficiente de correlación observamos que la relación entre las variables X = «número de semanas de régimen» e Y = «peso» es lineal negativa y fuerte, casi funcional.

b) La recta de regresión del peso sobre el número de semanas a régimen es $y = -1,25x + 71,05$, por lo que podemos suponer con un alto grado de fiabilidad que a las 7 semanas de régimen pesará 62,3 kg.

c) En el contexto del problema no es lógico suponer que el ritmo de pérdida de peso se mantenga al cabo de 24 semanas, por lo que no sería razonable utilizar la recta de regresión para realizar esa predicción. Al cabo de ese tiempo el peso se habrá estabilizado o la persona habrá enfermado gravemente.

2. a) Como el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ pertenece a ambas rectas de regresión, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 4\overline{y} + \overline{x} - 6 = 0 \\ \overline{y} + 2\overline{x} - 5 = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 1)$.

b) Las rectas de regresión vienen dadas por:

$$y - 1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{S_{xy}}{S_x^2} x - 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} - 1$$

$$x - 2 = \frac{S_{xy}}{S_y^2} \cdot (y - 1) \Rightarrow x = \frac{S_{xy}}{S_y^2} y - \frac{S_{xy}}{S_y^2} + 2$$

El producto de sus pendientes es r^2; por tanto:

$$r^2 = -\frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Como las pendientes son negativas, la covarianza es negativa y también lo es el coeficiente de correlación:

$$r = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Si llamamos X a la variable velocidad de reacción e Y a la destreza manual:

$\overline{x} = 29,85$

$S_x = 10,48$

$\overline{y} = 21,06$

$S_y = 12,78$

$S_{xy} = 110,01$

$r = 0,82$

a) Para determinar la puntuación pedida utilizamos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 21,06 = \frac{110,01}{10,48^2}(x - 29,85)$$

$y = 1,001x - 8,838$. La puntuación es 23,22.

b) Como en el apartado anterior, determinamos en este caso la recta de regresión de X sobre Y:

$x = 0,674y + 15,658$. La puntuación es 28,46.

c) El grado de fiabilidad de las predicciones es alto, puesto que el coeficiente de correlación es $r = 0,82$.

4. $\overline{x} = 64$

$S_x = 21,54$

$\overline{y} = 3$

$S_y = 1,41$

$S_{xy} = -30$

$r = -0,98$

a) A partir de la recta $y = -15x + 109$, el grado de humedad es 4 %.

b) A partir de la recta $x = -0,064 + 7,138$, $x = 3,9$ días, es decir, algo más de 93 horas.

5. a) $$S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{\sum z_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} =$$

$$= \overline{z} - \overline{z} = 0,$$

por tanto, $r_{xy} = \dfrac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = 0$

b) Si $r_{xy} = 0$, entonces $S_{xy} = 0$, es decir:

$$\frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} = \overline{x} \cdot \overline{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

www.yoquieroaprobar.es

21 Combinatoria

1. Calcula el valor de x sabiendo que $V_{x,5} = 360\,360$ y $V_{x,3} = 2\,730$.

2. Halla los valores de m y n sabiendo que $V_{m,n} = 272$ y $C_{m,n} = 136$.

3. ¿Qué relación existe entre m y n si se verifica la igualdad $\binom{m}{n} = 2 \cdot \binom{m-1}{n}$?

4. Calcula el término independiente del desarrollo de $\left(2 \cdot x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$

5. Halla el término que contiene la potencia x^{10} en el desarrollo de $(x^2y - x)^7$.

6. Halla la suma de los coeficientes del desarrollo de $(1 + x)^{15}$.

7. Con nueve personas tenemos que formar tres comisiones, una de dos, otra de tres y la última de cuatro personas. ¿De cuántas maneras distintas podemos hacerlo?

8. Si colocamos en orden alfabético todas las palabras con o sin sentido que podemos formar permutando las letras «ABCDE»:

a) ¿Qué lugar ocupa la palabra «CADBE»?

b) ¿Qué palabra ocupa el lugar 90?

9. En una plantación de maíz hay diez puntos de riego automático que se pueden activar independientemente. Determina de cuántas maneras distintas puede regarse la plantación si:

a) Deben activarse exactamente seis puntos de riego.

b) Deben activarse al menos seis puntos de riego.

c) Como máximo pueden estar activados tres puntos de riego.

10. Determina de cuántas maneras puede pintarse una cuadrícula como la de la figura si:

a) Cada casilla puede ser blanca o negra, indistintamente.

b) Debe haber 5 casillas blancas y 4 negras.

c) Cada casilla debe ser de un color diferente.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

11. ¿Cuántas palabras de cinco letras se pueden formar con siete consonantes y tres vocales de manera que cada una empiece por consonante, tenga al menos dos vocales y sean todas las letras distintas?

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. Calculando el cociente y simplificando, ya que x deber ser mayor que 5:

$(x - 3) \cdot (x - 4) = 132 \Rightarrow x^2 - 7x - 120 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 15$ ($x = -8$ no es válida).

2. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} \Rightarrow 136 = \dfrac{272}{P_n} \Rightarrow P_n = 2 \Rightarrow n = 2$

$V_{m,2} = 272 \Rightarrow m \cdot (m - 1) = 272 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - m - 272 = 0 \Rightarrow m = 1$

(La solución $m = -16$ no es válida.)

3. $\dfrac{m!}{(m - n)! \cdot n!} = 2\dfrac{(m - 1)!}{(m - 1 - n)! \cdot n!}$

Simplificando esta igualdad obtenemos:

$\dfrac{m}{m - n} = 2 \Rightarrow m = 2n$

4. El término general del desarrollo es:

$\dbinom{18}{n} \cdot (2x^2)^{18-n} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

x aparece con exponente $2(18 - n) - n$.
Igualando: $2(18 - n) - n = 0 \Rightarrow n = 12$.
El término buscado es:

$\dbinom{18}{12} \cdot (2x^2)^{18-12} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{12} = 1\,188\,096$

5. El término general del desarrollo es:

$\dbinom{7}{n} \cdot (x^2y)^{7-n} \cdot (-x)^n$, en el que x aparece con exponente $2(7 - n) + n$. Igualando:
$2(7 - n) + n = 10 \Rightarrow n = 4$. El término buscado es $\dbinom{7}{4} \cdot (x^2y)^{7-4} \cdot (-x)^4 = 35\ x^{10}y^3$.

6. $(1 + x)^{15} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{14}x^{14} + c_{15}x^{15}$

La suma de los coeficientes se obtiene cuando $x = 1$.
Por tanto: $(1 + 1)^{15} = 2^{15} = 32\,768$

7. Para formar la comisión de dos personas: $C_{9,2}$

Para cada una de estas posibles comisiones hay $C_{7,3}$ maneras de elegir la comisión de 3 personas.

$C_{9,2} \cdot C_{7,3} = \dfrac{9!}{7! \cdot 2!} \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 1\,260$ maneras de elegir las tres comisiones.

8. Número total de permutaciones: $P_5 = 5! = 120$

a) Empiezan por A: $P_4 = 4! = 24$
Empiezan por B: $P_4 = 4! = 24$
Empiezan por CAB: $P_2 = 2! = 2$

La siguiente es la permutación CABDE, que ocupa el lugar $24 + 24 + 2 + 1 = 51$.

b) Por el apartado a se sabe que empiezan por A, B o C 24 permutaciones de cada una.
Así hay $24 \cdot 3 = 72$ anteriores a las permutaciones que comienzan por D.
Empiezan por DA: $P_3 = 3! = 6$
Empiezan por DB: $P_3 = 3! = 6$
Empiezan por DC: $P_3 = 3! = 6$
Hay $72 + 6 \cdot 3 = 90$ permutaciones anteriores a las permutaciones que comienzan por DE.
La permutación buscada es la última de las que comienzan por DC: DCEBA.

9. a) No importa el orden en que se activen:
$C_{10,6} = 210$

b) Se pueden activar 6, 7, 8, 9 o 10 puntos de riego:
$C_{10,6} + C_{10,7} + C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 386$

c) Podemos activar 3, 2, 1 o ningún punto de riego:
$C_{10,3} + C_{10,2} + C_{10,1} + 1 = 176$

10. a) Para colorear cada casilla se presentan dos alternativas, blanco y negro; por tanto:
$VR_{2,9} = 2^9 = 512$

b) De las 9 casillas, elegimos 5 para el blanco:
$C_{9,5} = \dfrac{9!}{(9 - 5)! \cdot 5!} = 126$
(Las restantes son negras.)

c) $P_9 = 9! = 362\,880$

11. La primera letra podemos elegirla de siete maneras. Las cuatro letras restantes pueden ser: dos vocales y dos consonantes: $V_{3,2} \cdot V_{6,2}$, o tres vocales y una consonante: $P_3 \cdot 6$.

El número total de palabras será:

$7 \cdot (V_{3,2} \cdot V_{6,2} + P_3 \cdot 6) =$
$= 7 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6) = 1\,512$

www.yoquieroaprobar.es

22 Cálculo de probabilidades

1. En una caja hay m bolas blancas y una bola roja. Al extraer de la caja dos bolas simultáneamente, la probabilidad de que sean blancas es $\frac{1}{2}$. Calcula el número de bolas blancas que tenía la caja.

2. Tras la primera votación, el jurado que debe otorgar un premio ha llegado a la siguiente conclusión: el concursante A tiene una probabilidad de ganarlo doble que el concursante B, y las probabilidades que tienen los concursantes B y C de ganar son entre sí como dos es a tres. Calcula la probabilidad que tiene cada concursante de ganar el premio tras la votación definitiva.

3. Del conjunto de todas las sucesiones de n términos compuestas por las cifras 0, 1 y 2 se escoge al azar una sucesión. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = «la sucesión comienza por 0».

b) B = «la sucesión no contiene ninguna cifra 2».

c) C = «la sucesión contiene m + 2 cifras 0, dos de las cuales están en los extremos».

d) D = «la sucesión contiene m_0 cifras 0, m_1 cifras 1 y m_2 cifras 2».

4. Los problemas del Caballero de Méré.

a) El Caballero de Méré, hombre ilustrado de la corte de Luis XIV, le propuso el siguiente problema al matemático Blaise Pascal.

«¿Qué es más probable, obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, u obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados veinticuatro veces?»

b) Méré se interesó también por el número mínimo de lanzamientos de dos dados que sería necesario realizar para obtener un seis doble con probabilidad favorable, es decir, mayor que 0,5. ¿Cuál habría sido la respuesta de Pascal?

5. Los sucesos $A \cup B \cup C$ y D forman un sistema completo de sucesos en el $p(D) = \frac{1}{4}$, siendo A, B y C tres sucesos equiprobables e independientes que no pueden ocurrir simultáneamente. Calcula la probabilidad de los sucesos A, B y C.

6. Una urna contiene tres bolas negras y dos blancas. El primer jugador extrae tres bolas. Vuelve a meter en la urna una bola negra si entre las bolas que ha sacado hay más bolas negras; en caso contrario, devuelve a la urna una bola blanca. El segundo jugador extrae después una bola y, por su color, debe adivinar la cantidad de bolas blancas que había entre las tres que sacó el primer jugador. Si el segundo jugador ha sacado una bola blanca, calcula la probabilidad de que el primer jugador extrajera:

a) Tres bolas negras.

b) Una bola blanca.

c) Dos bolas blancas.

7. En un determinado juego de dados el jugador se anota un punto cada vez que el resultado de la tirada es 6. Se dispone de dos dados, de los cuales uno es correcto y el otro está trucado, de manera que la probabilidad de obtener un 6 es siete veces mayor que la de cualquier otro resultado. Si escoges un dado al azar y juegas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado elegido sea el trucado en cada uno de los siguientes supuestos?

a) Antes de comenzar a jugar.

b) Si juegas una partida y la ganas.

c) Si juegas una partida y la pierdes.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $p(\text{2 blancas}) = \dfrac{C_{m,2}}{C_{m+1,2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m = 3$

2. Los sucesos «ganar A», «ganar B» y «ganar C» forman un sistema completo:

$p(\text{ganar A}) + p(\text{ganar B}) + p(\text{ganar C}) = 1$

$p(\text{ganar A}) = 2p(\text{ganar B})$ y $\dfrac{p(\text{ganar B})}{p(\text{ganar C})} = \dfrac{2}{3}$

Resolviendo el sistema:

$p(\text{ganar A}) = \dfrac{4}{9}$, $p(\text{ganar B}) = \dfrac{2}{9}$ y $p(\text{ganar C}) = \dfrac{1}{3}$

3. a) $p(A) = \dfrac{VR_{3,n-1}}{VR_{3,n}} = \dfrac{1}{3}$

b) $p(B) = \dfrac{VR_{2,n}}{VR_{3,n}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) $p(C) = \dfrac{C_{n-2,m} \cdot VR_{2,n-2-m}}{VR_{3,n}}$

d) Como $m_0 + m_1 + m_2 = n$, $p(D) = \dfrac{PR_n^{m_0,m_1,m_2}}{VR_{3,n}}$

4. a) En cuatro lanzamientos de un dado:

$p(\text{al menos un 6}) = 1 - p(\text{no obtener ningún 6}) =$

$= 1 - \dfrac{5^4}{6^4} = 0{,}51774...$

En veinticuatro lanzamientos de dos dados:

$p(\text{al menos un 6 doble}) = \dfrac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0{,}49140...$

b) $p = \dfrac{36^n - 35^n}{36^n} = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \geqslant 0{,}5 \Rightarrow \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqslant 0{,}5$

Como la función logaritmo es creciente:

$L\left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqslant L(0{,}5) \Rightarrow n \geqslant \dfrac{L(0{,}5)}{L\left(\dfrac{35}{36}\right)} \Rightarrow n \geqslant 25$

5. $p(A \cup B \cup C) = 1 - p(D) = \dfrac{3}{4}$

Si $p = p(A) = p(B) = p(C)$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) -$
$- p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

$\dfrac{3}{4} = p + p + p - p \cdot p - p \cdot p - p \cdot p - 0$

$$\frac{3}{4} = 3p - 3p^2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

6. R = «El segundo jugador saca una bola blanca».

Extracción del primer jugador	Probabilidad	Composición final de la urna	$p(R/U_i)$
3N	$\frac{1}{10}$	U_1: 2B1N	$\frac{2}{3}$
1B2N	$\frac{3}{5}$	U_2: 1B2N	$\frac{1}{3}$
2B1N	$\frac{3}{10}$	U_3: 1B2N	$\frac{1}{3}$

$p(R) = p(R/U_1) \cdot p(U_1) + p(R/U_2) \cdot p(U_2) + p(R/U_3) \cdot p(U_3) =$
$= \dfrac{11}{30}$

a) $p(U_1/R) = \dfrac{p(B/U_1) \cdot p(U_1)}{p(R)} = \dfrac{2}{11}$

b) $p(U_2/R) = \dfrac{p(B/U_2) \cdot p(U_2)}{p(R)} = \dfrac{6}{11}$

c) $p(U_3/R) = \dfrac{p(B/U_3) \cdot p(U_3)}{p(R)} = \dfrac{3}{11}$

7. a) Sea el suceso T = «dado trucado»

$p(T) = \dfrac{1}{2}$

b) Se considera el suceso G = «ganar la partida»

$p(G) = p(G/T) \cdot p(T) + p(G/\overline{T}) \cdot p(\overline{T}) =$

$= \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$

La probabilidad de elegir el dado trucado si se ha ganado la partida es:

$$p(T/G) = \frac{p(G/T) \cdot p(T)}{p(G)} = \frac{\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{7}{9}$$

c) La probabilidad de elegir el dado trucado si se ha perdido la partida es:

$$p(T/\overline{G}) = \frac{p(\overline{G}/T) \cdot p(T)}{p(\overline{G})} = \frac{p(\overline{G}/T) \cdot p(T)}{1 - p(G)} =$$

$$= \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

23 Distribuciones discretas. Distribución binomial

1. Una bolsa contiene cuatro bolas numeradas de 0 a 3. En el experimento aleatorio que consiste en extraer dos bolas de la bolsa se definen las variables aleatorias:

X: «máximo valor extraído». Y: «suma de los valores extraídos».

Determina las funciones de probabilidad asociadas a estas variables aleatorias y el valor medio esperado si no se devuelve la primera bola a la bolsa.

2. De una urna U con tres bolas numeradas del 1 al 3 se extraen al azar, una tras otra, las tres bolas, anotándose el número de tres cifras que resulta tras las tres extracciones. Se considera la variable aleatoria que mide el número de puntos fijos de la permutación que se obtiene como resultado del experimento, es decir, el número de coincidencias con la permutación ordenada 123.

a) Expresa la distribución de probabilidad asociada a este modelo.

b) Calcula el valor medio esperado de esta distribución.

3. El encargado de un restaurante que solo da cenas previa reserva sabe, por experiencia, que el 15 % de las personas que reservan mesa no acuden después a cenar. Si el restaurante acepta 25 reservas, pero solo dispone de 20 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que pueda atender a todas las personas que realmente vayan a cenar?

4. Dos jugadores de ajedrez de igual nivel de destreza en el juego se enfrentan en un torneo. ¿Qué es más probable, ganar dos partidas de cuatro o ganar tres de seis? Las tablas no se tienen en cuenta.

5. Un segmento AB de 25 cm de longitud está dividido en dos partes por un punto C en una relación 3:2. Sobre este segmento se marcan al azar cuatro puntos. Halla la probabilidad de que exactamente dos de ellos estén a la izquierda de C. Se supone que la probabilidad de que un punto caiga en un determinado segmento es proporcional a la longitud de este y no depende de la posición.

6. Tras una serie de observaciones sobre el flujo de tráfico en un determinado cruce de calles se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- El 30 % de los coches gira a la derecha en el cruce.
- El 20 % de los coches gira a la izquierda en el cruce.

Si en este momento hay diez coches detenidos en el semáforo previo al cruce:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos gire a la derecha?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo tres de ellos giren a la izquierda?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de ellos siga de frente?

7. Una partícula se desplaza por el eje de abscisas sobre los puntos ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... de la siguiente forma: cada segundo salta una unidad hacia la derecha o hacia la izquierda con probabilidad igual a 0,5 en ambos casos. Si sale del origen en el momento cero:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que a los 11 segundos se encuentre en $+3$?, ¿y en -4?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al cabo de un minuto, se encuentre de nuevo en el origen?

8. Si X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2.

a) Obtén la media de la variable aleatoria $Y = (X - c)^2$ en función de μ y σ^2, siendo c una constante.

b) ¿Para qué valor de c alcanza su valor mínimo la media de la variable aleatoria Y?

9. Demuestra que si X es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial B(n, p), se verifica la siguiente fórmula: $p(X = r + 1) = \dfrac{(n - r) \cdot p}{(r + 1) \cdot (1 - p)} \cdot p(X = r)$

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1.

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\mu = 2{,}3333$

y_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\mu = 3$

2. a) X: «número de puntos fijos».

Resultado	123	132	213	231	312	321
X	3	1	1	0	0	1

x_i	0	1	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

b) $\mu = 1$

3. X: «número de reservas que no acuden a cenar» sigue una distribución binomial B(25; 0,15).
$p(X \geqslant 5) = 1 - p(X < 5) = 0{,}3179$

4. Como los dos tienen la misma capacidad, la probabilidad de ganar una partida uno de ellos es $p = \frac{1}{2}$.

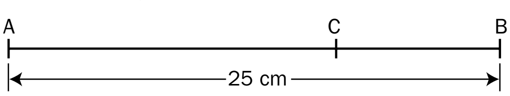
Si juegan cuatro partidas, se tiene una distribución binomial $B\left(4; \frac{1}{2}\right)$, y así $p(X = 2) = 0{,}375$;

y si juegan seis partidas, la distribución es $B\left(6; \frac{1}{2}\right)$.

Por tanto: $p(X = 3) = 0{,}3125$

Luego es más probable ganar dos partidas de cuatro que tres de seis.

5.



X: «número de puntos en CB», $p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

La distribución aleatoria de los puntos sigue una distribución binomial:

$B\left(4; \frac{3}{5}\right)$

$p(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}3456$

6. a) $p = p(\text{no girar a la derecha}) =$
$= 1 - p(\text{girar a la derecha}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

La variable aleatoria X: «número de coches que no giran a la derecha» sigue una distribución binomial B(10; 0,7); $p(X = 0) = 59 \cdot 10^{-7}$

b) $p = p(\text{girar a la izquierda}) = 0{,}2$.
La variable X: «número de coches que giran a la izquierda» sigue una distribución B(10; 0,2).
$p(X \leqslant 3) = 0{,}8791$

c) $p = p(\text{seguir de frente}) = p(\text{no girar}) = 0{,}5$
La variable aleatoria X: «número de coches que siguen de frente» sigue una distribución B(10; 0,5).
$p(X = 5) = 0{,}2461$

7. X: «número de saltos a la derecha».

a) 1. B(11; 0,5). Si d = total de saltos a la derecha, i = total de saltos a la izquierda
$d - i = 3$ y $d + i = 11 \Rightarrow d = 7$

$$p(X = 7) = \binom{11}{7} \cdot (0{,}5)^7 \cdot (0{,}5)^4 = 0{,}1611$$

2. $d - i = -4$ y $d + i = 11 \Rightarrow 2d = 7$
No puede alcanzar esa posición. La probabilidad es cero.

b) B(60; 0,5); $d - i = 0$ y $d + i = 60 \Rightarrow d = 30$

$$p(X = 30) = \binom{60}{30} \cdot (0{,}5)^{30} \cdot (0{,}5)^{30} = 0{,}1026$$

8. a) $$\mu_Y = \sum_i (x_i - c)^2 p_i = \sum_i (x_i^2 - 2x_ic + c^2)\, p_i =$$
$$= \sum_i x_i^2 \cdot p_i - \sum_i 2x_ic \cdot p_i + \sum_i c^2 \cdot p_i =$$
$$= \sigma^2 + \mu^2 - 2c \sum_i x_i \cdot p_i + c^2 \sum_i p_i =$$
$$= \sigma^2 + \mu^2 - 2c\mu + c^2 = \sigma^2 + (\mu - c)^2$$

b) μ_Y es máximo cuando $(\mu - c)^2 = 0 \Leftrightarrow c = \mu$

9. $$p(X = r + 1) = \binom{n}{r+1} \cdot p^{r+1} \cdot (1 - p)^{n-(r+1)} =$$
$$= \frac{n!}{(r + 1)! \cdot (n - r - 1)!} \cdot p^{r+1} \cdot (1 - p)^{n-r-1} =$$
$$= \frac{n! \cdot (n - r)}{(r + 1) \cdot r!(n - r)!} \cdot p^r \cdot p \cdot (1 - p)^{n-r} \cdot (1 - p)^{-1} =$$
$$= \frac{(n - r) \cdot p}{(r + 1) \cdot (1 - p)} \cdot \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r} =$$
$$= \frac{(n - r) \cdot p}{(r + 1) \cdot (1 - p)} \cdot p(X = r)$$

www.yoquieroaprobar.es

24 Distribuciones continuas. Distribución normal

1. El beneficio en la venta de artículos textiles, en tanto por uno, es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{1 + x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula el valor de k y el beneficio medio esperado.

2. La distribución de los ingresos de los individuos de cierta población, en miles de euros, es una variable aleatoria continua X con función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\,000}(20x - x^2) & \text{si } 0 < x \leqslant 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

a) Calcula el ingreso familiar medio esperado de esa población.

b) Si solo realizan la declaración de la renta los individuos con ingresos superiores a 9 000 euros, ¿qué porcentaje de ellos quedarán exentos de realizar la declaración?

3. Se sabe que la altura de los varones de una Universidad sigue una distribución normal de media 1,75 m y que el 33 % de estos alumnos mide más de 1,80 m. Calcula la varianza de la distribución de las alturas.

4. El tiempo, X, de funcionamiento (en horas) hasta la primera avería de un lavavajillas sigue una distribución normal de media 20 000 horas. Se sabe que el 20 % de los lavavajillas tiene, como mínimo, una duración de 21 680 horas.

a) Calcula $p(|X - 20\,000| < 2\,000)$.

b) Si se quiere ofrecer un período de garantía, expresado en horas, ¿cuál debe ser el máximo valor que hay que dar a este para tener que reemplazar solo el 5 % de los aparatos?

5. El peso del contenido de las latas de melocotón en almíbar envasadas por una cierta máquina se distribuye normalmente con media de 1 kg. El proceso de envasado está diseñado de tal manera que solo una de cada 100 latas contiene una cantidad del producto fuera del intervalo 950-1 050 g. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener la desviación típica de la distribución de pesos para que se cumpla este requisito?

6. En una isla del Pacífico se ha comprobado que la estatura sigue un modelo normal de probabilidad con una media de 160 cm. Sabiendo que el 47,5 % de los nativos de esa isla tienen una estatura comprendida entre 150 y 160 cm y que el 16 % de ellos supera los 165 cm, determina, sin utilizar las tablas de la distribución normal:

a) El porcentaje de nativos que tienen una estatura inferior a 170 cm.

b) La estatura que es superada por el 84% de la población.

7. Se sabe que el 40 % de los consumidores de una marca de cereales para el desayuno son niños de edades comprendidas entre los ocho y los doce años. Se eligen al azar 100 niños de esas edades. ¿Cuál es la probabilidad de que, si los primeros veinticinco niños preguntados declaran que toman esa marca de cereal para desayunar, haya exactamente cuarenta niños en la muestra que la consuman?

8. Un examen contiene 38 preguntas a las que solo se puede responder Verdadero o Falso. Si decidimos contestar al azar lanzando al aire una moneda, la probabilidad de superar el examen es 0,4364. Calcula cuál es el número mínimo de preguntas que hay que acertar para superar este examen.

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. $1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{k}{1+x^2}dx = k \cdot [\text{arctg}x]_0^1 =$

$= k\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = k\frac{\pi}{4} \Rightarrow k = \frac{4}{\pi}$

$\mu = \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \int_0^1 \frac{\frac{4}{\pi}x}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$= \frac{2}{\pi} \cdot [L\,|1 + x^2|]_0^1 = \frac{2 \cdot L2}{\pi}$

2. a) $\mu = \int_0^{20} x \cdot \frac{3}{4\,000}(20x - x^2)dx =$

$= \frac{3}{4\,000}\int_0^{20} x(20x - x^2)dx = 10$

El ingreso familiar medio esperado es de 10 000 euros.

b) $p(x < 9) = \int_0^9 \frac{3}{4\,000}(20x - x^2)dx = 0{,}425$

El 42,5 % de los individuos de esa población quedarán exentos.

3. X es $N(1{,}75, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 1{,}75}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(X > 1{,}80) = 0{,}33$

$p\left(Z > \frac{1{,}80 - 1{,}75}{\sigma}\right) = 0{,}33 \Rightarrow 1 - p\left(Z \leqslant \frac{0{,}05}{\sigma}\right) = 0{,}33$

$p\left(Z \leqslant \frac{0{,}05}{\sigma}\right) = 0{,}67$

Buscando en la tabla:

$\frac{0{,}05}{\sigma} = 0{,}44 \Rightarrow \sigma = 0{,}1136 \text{ cm} \Rightarrow \sigma^2 = 0{,}0129 \text{ cm}^2$

4. X es $N(20\,000, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 20\,000}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(X > 21\,680) = 0{,}2 = p\left(Z > \frac{1\,680}{\sigma}\right)$

$p\left(Z < \frac{1\,680}{\sigma}\right) = 0{,}8$

Buscando en la tabla $\frac{1\,680}{\sigma} = 0{,}84$, ya que $p(Z < 0{,}84) = 0{,}7995$; por tanto: $\sigma = 2\,000$.

a) $p(|X - 20\,000| < 2\,000) = p(|Z| < 1) =$

$= 2\left[p(Z < 1) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}6826$

b) M: «máximo valor».

$p(X < M) = 0{,}95 = p\left(Z < \frac{M - 20\,000}{2\,000}\right)$

$\frac{M - 20\,000}{2\,000} = 1{,}645$

$M = 23\,290$

5. X es $N(1\,000, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - 1\,000}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

$p(950 \leqslant X \leqslant 1\,050) = 0{,}99$

$p\left(\frac{-50}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) = 0{,}99$

$2\left[p\left(Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}99 \Rightarrow p\left(Z \leqslant \frac{50}{\sigma}\right) = 0{,}995$

Buscando en la tabla $\frac{50}{\sigma} \geqslant 2{,}58 \Rightarrow \sigma \leqslant 19{,}38$

El máximo valor es: $\sigma = 19{,}38$ g

6. La función de densidad es simétrica respecto a la media $\mu = 160$.

a) $p(X < 170) = p(X > 150) = 0{,}475 + 0{,}5 =$
$= 0{,}975$

El 97,5 % de los nativos mide menos de 170 cm.

b) $0{,}84 = 1 - 0{,}16 = 1 - p(X > 165) =$
$= 1 - p(X > \mu + 5) = 1 - p(X < \mu - 5) = p(X \geqslant 155)$

7. X: «número de consumidores entre los 100 niños» es $B(100; 0{,}4)$ con $\mu = 40$ y $\sigma \approx 4{,}9$.

Se puede aproximar por una normal $N(40; 4{,}9)$.

$p(X = 40/X \geqslant 25) = \frac{p(X = 40)}{p(X \geqslant 25)} =$

$= \frac{p(39{,}5 < X \leqslant 40{,}5)}{1 - p(X < 24{,}5)} =$

$= \frac{p\left(\frac{39{,}5 - 40}{4{,}9} < Z \leqslant \frac{40{,}5 - 40}{4{,}9}\right)}{1 - p\left(Z < \frac{24{,}5 - 40}{4{,}9}\right)} =$

$= \frac{2[p(Z \leqslant 0{,}1) - 0{,}5]}{p(Z < 3{,}16)} = 0{,}08$

8. X: «número de respuestas correctas» es $B(38; 0{,}5)$ con $\mu = 19$ y $\sigma = 3{,}08$. Se puede aproximar por una normal $N(19; 3{,}08)$. Si M: «número de respuestas correctas necesario para aprobar», $p(X \geqslant M) =$
$= 0{,}4364$.

$0{,}4364 = p\left(Z \geqslant \frac{M - 19}{3{,}08}\right) \Rightarrow \frac{M - 19}{3{,}08} \geqslant 0{,}16$

$M \geqslant 19{,}492$

Como mínimo hay que acertar veinte preguntas.

www.yoquieroaprobar.es