1 y 2 Números reales. Operaciones. Ordenación

1. Clasifica los siguientes números decimales en racionales o irracionales.

a) 12,23232323232323...
b) 12,360360360360360...
c) 12,360360036000360000...
d) 12,135531135531135531...
e) 12,112123123412345123456...

2. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenece cada uno de los siguientes números:

a) $-\sqrt{9}$ b) $\frac{12}{3}$ c) 12,24242424... d) 1,122333444455555... e) $3{,}14 + \pi$

3. La siguiente tabla muestra aproximaciones por exceso y por defecto del número real $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Complétala.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732		
Por exceso	1,415	1,733		

4. Toma logaritmos en los dos miembros de las siguientes expresiones:

a) $A = xy^2z^4$ b) $B = \dfrac{2x^2 \cdot y^4}{z^6}$ c) $C = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}}$

5. Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

a) $\log A = 2 \log 3 - 2 \log x + 3 \log y - \log z$
b) $\log B = \log (2x - 2y) + \log (x - 2y)$

6. Escribe en forma potencial las siguientes expresiones:

a) $4x^2 \cdot 3x^4$ b) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2x}}$ d) $\dfrac{3x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}}$ e) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}}$

7. Escribe un número comprendido entre:

a) $\frac{2}{11}$ y $\frac{3}{11}$ b) 0,002341 y 0,002342

8. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{25}{8}, \frac{256}{81}, \frac{22}{7} \text{ y } \frac{377}{120}$$

9. Utilizando el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras, representa en la recta real los siguientes números reales:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\sqrt{8}$ d) $\sqrt{20}$

10. Representa en la recta real los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $(3, 5)$ b) $(4, 6]$ c) $(3, +\infty)$ d) $(-\infty, -2]$

11. Representa los siguientes conjuntos de números en la recta real:

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geq 3$

12. Una tienda cobra por el alquiler de una bicicleta 2 euros a la hora. Otra tienda cobra por el mismo alquiler 1,75 euros a la hora, pero a esta cantidad se le debe añadir 4 euros independientemente del tiempo que se contrate. ¿A partir de cuántas horas es más económica la segunda tienda?

SOLUCIONES

1. a) Racional por ser un número decimal periódico.

b) Racional por ser un número decimal periódico.

c) Irracional por ser un número decimal no periódico.

d) Racional por ser un número decimal periódico.

e) Irracional por ser un número decimal no periódico.

2. a) Números enteros.

b) Números naturales.

c) Números racionales.

d) Números reales.

e) Números reales.

3.

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	Error
Por defecto	1,414	1,732	3,146	0,002
Por exceso	1,415	1,733	3,148	

4. a) $\log A = \log x + 2\log y + 4\log z$

b) $\log B = \log 2 + 2\log x + 4\log y - 6\log z$

c) $\log C = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

5. a) $A = \dfrac{3^2 \cdot y^3}{x^2 \cdot z}$

b) $B = (2x - 2y) \cdot (x - 2y)$

6. a) $4x^2 \cdot 3x^4 = 12 \cdot x^6$

b) $x^{-3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{-3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{-3+\frac{2}{3}} = x^{-\frac{7}{3}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{2x}} = \dfrac{2}{(2x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} = 2^{1-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} = \dfrac{3x+1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}} = (3x+1)^{1-\frac{1}{3}} =$

$= (3x+1)^{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{2x}} = ((2x)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (2x)^{\frac{1}{6}}$

7. a) $\dfrac{2}{11} < \dfrac{\frac{2}{11}+\frac{3}{11}}{2} < \dfrac{3}{11} \Rightarrow \dfrac{2}{11} < \dfrac{5}{22} < \dfrac{3}{11}$

b) $0{,}002341 < 0{,}0023415 < 0{,}002342$

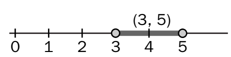
8. $\dfrac{25}{8} < \dfrac{377}{120} < \dfrac{22}{7} < \dfrac{256}{81}$

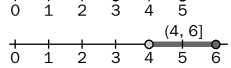
9. a)

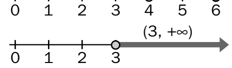
b)

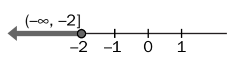
c)

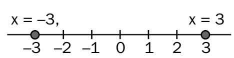
d)

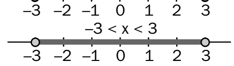
10. a) 

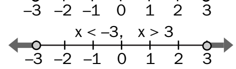
b) 

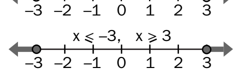
c) 

d) 

11. a) 

b) 

c) 

d) 

12. $2x > 1{,}75x + 4 \Rightarrow 0{,}25x > 4 \Rightarrow x > 16$

A partir de las 16 horas es más económica la segunda tienda.

3 Expresiones algebraicas

1. Dados los polinomios $A(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ $B(x) = 3x^3 - x^2 + 2$ y $C(x) = -x^3 + 2x - 4$, calcula:

a) $A(x) + B(x) + C(x)$ b) $A(x) - 2B(x) - C(x)$ c) $-3A(x) + B(x) + 4C(x)$

2. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $(2x^2 - 3x + 5) \cdot (-3x + 2)$ b) $(-x^3 + x^2 - 2) \cdot (-3x^2 - 4)$

3. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2 \cdot (x^2 - 1)^2 - 4x \cdot (2x^2 + 3x - 1)$ b) $-4 \cdot (2x - 3) \cdot (2x + 3) + 3 \cdot (2x - 3)^2$

4. a) Calcula el resto y el cociente de la siguiente división de polinomios:

$(-3x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 8) : (3x^2 - 2x + 5)$

b) Escribe la expresión de la división entera: dividendo = divisor · cociente + resto

5. Aplica la regla de Ruffini a las divisiones siguientes y escribe, en cada caso, el dividendo en función del cociente, del divisor y del resto:

a) $(4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$ b) $(2x^5 - x^3 + 2x - 1) : (x - 3)$

6. Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios y factorízalos:

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ b) $x^3 - x^2 - 5x - 3$ c) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

7. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 4x - 15}$ b) $\dfrac{3x^3 - 6x^2 + 3x}{2x^3 + 2x^2 - 10x + 6}$ c) $\dfrac{4x^3 + 3x^2 - 25x + 6}{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}$

8. Halla el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2 + x}{2x^2 + 2x - 1}$ para $x = 1$ b) $\dfrac{-x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 2}$ para $x = -3$

9. Halla el verdadero valor de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2 - 2x}{2x^2 - x - 1}$ para $x = 1$ b) $\dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$ para $x = -2$

10. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas y simplifica el resultado si es posible:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} + \frac{6}{x^2 - 1}$$

11. Realiza la siguiente multiplicación de fracciones algebraicas y simplifica el resultado si es posible:

$$\frac{x - 1}{2x + 1} \cdot \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1}$$

12. Realiza la siguiente división de fracciones algebraicas y simplifica el resultado lo más posible:

$$\left(1 + \frac{x - 2}{x + 2}\right) : \frac{x}{x^2 - 4}$$

13. Dado el polinomio $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2kx + 4$:

a) Calcula, en función de k, su valor numérico para $x = -2$.

b) Calcula el valor de k para que el polinomio sea divisible por $x + 2$.

SOLUCIONES

1. a) $A(x) + B(x) + C(x) = 2x^2 - 3$

b) $A(x) - 2B(x) - C(x) = -7x^3 + 5x^2 - 4x - 1$

c) $-3A(x) + B(x) + 4C(x) = 5x^3 - 10x^2 + 14x - 11$

2. a) $(2x^2 - 3x + 5) \cdot (-3x + 2) =$
$= -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10$

b) $(-x^3 + x^2 - 2) \cdot (-3x^2 - 4) =$
$= 3x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 8$

3. a) $2 \cdot (x^2 - 1)^2 - 4x \cdot (2x^2 + 3x - 1) =$
$= 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 4x + 2$

b) $-4 \cdot (2x - 3) \cdot (2x + 3) + 3 \cdot (2x - 3)^2 =$
$= -4x^2 - 36x + 63$

4. a) Cociente $= -x^2 + 3x - 1$ Resto $= 2x - 3$

b) $(-3x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 19x - 8) =$
$= (3x^2 - 2x + 5) \cdot (-x^2 + 3x - 1) + 2x - 3$

5. a) Cociente $= 4x^3 - 11x^2 + 25x - 49$
Resto $= 93$
$(4x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 5) =$
$= (4x^3 - 11x^2 + 25x - 49) \cdot (x + 2) + 93$

b) Cociente $= 2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 155$
Resto $= 464$
$(2x^5 - x^3 + 2x - 1) =$
$= (2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 155) \cdot (x - 3) + 464$

6. a) Raíces: $x = -1$ $x = 2$ $x = -3$
$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

b) Raíces: $x = -1$ doble $x = 3$
$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2 \cdot (x - 3)$

c) Raíces: $x = 1$ doble $x = -2$ doble
$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2$

7. a) $$\frac{2x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 4x - 15} = \frac{(2x - 1) \cdot (x - 3)}{(3x + 5) \cdot (x - 3)} = \frac{2x - 1}{3x + 5}$$

b) $$\frac{3x^3 - 6x^2 + 3x}{2x^3 + 2x^2 - 10x + 6} = \frac{3x \cdot (x - 1)^2}{(2x + 6) \cdot (x - 1)^2} = \frac{3x}{2x + 6}$$

c) $$\frac{4x^3 + 3x^2 - 25x + 6}{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6} = \frac{(4x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)}{(x^2 - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)} = \frac{4x - 1}{x^2 - 1}$$

8. a) $$\frac{2 + 1}{2 + 2 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

b) $$\frac{-9 - 6 - 3}{18 - 9 - 2} = \frac{-18}{7}$$

9. a) $$\frac{2x^2 - 2x}{2x^2 - x - 1} = \frac{2x \cdot (x - 1)}{(2x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{2x}{2x + 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

b) $$\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{(2x - 1) \cdot (x + 2)} = \frac{x - 1}{2x - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-2 - 1}{2(-2) - 1} = \frac{3}{5}$$

10. $$\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} + \frac{6}{x^2 - 1} =$$
$$= \frac{2 \cdot (x + 1) + 3 \cdot (x - 1) + 6}{(x - 1) \cdot (x + 1)} =$$
$$= \frac{2x + 2 + 3x - 3 + 6}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{5x + 5}{(x - 1) \cdot (x + 1)} =$$
$$= \frac{5 \cdot (x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{5}{x - 1}$$

11. $$\frac{x - 1}{2x + 1} \cdot \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1} =$$
$$= \frac{(x - 1) \cdot (2x + 1) \cdot (x - 3)}{(2x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x - 3}{x + 1}$$

12. $$\left(1 + \frac{x - 2}{x + 2}\right) : \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{\dfrac{x + 2 + x - 2}{x + 2}}{\dfrac{x}{(x + 2) \cdot (x - 2)}} =$$
$$= \frac{2x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x + 2)} = 2x - 4$$

13. a) El valor numérico se obtiene sustituyendo la indeterminada por -2. Por tanto:
$p(-2) =$
$= 2 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 -$
$- 2k \cdot (-2) + 4 = 32 + 24 + 16 + 4k + 4 =$
$= 76 + 4k$

b) Para que el polinomio dado sea divisible por $x + 2$ debe verificarse que su valor numérico para $x = -2$ sea nulo. Por tanto:

$$76 + 4k = 0 \Rightarrow k = -\frac{76}{4} = -19$$

4 Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve las ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{4x}{15} = 1 + \frac{22x}{15}$ b) $\frac{2x + 5}{5} = 2 + x - \frac{x + 3}{3}$ c) $\frac{5x - 2}{4} - \frac{7x - 3}{8} = \frac{x - 1}{2}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(3x + 1) \cdot (3x - 1)}{9} = \frac{(x - 5) \cdot (x + 1)}{2} + \frac{(9x - 1) \cdot (x + 3)}{18} + \frac{8}{9}$

b) $\frac{(3x - 7) \cdot (3x + 7)}{6} = \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(2x + 1)^2}{4}$

c) $\frac{x \cdot (x + 1)}{15} + \frac{(x - 5)^2}{5} + \frac{(x + 3)^2}{3} = \frac{(3x + 1) \cdot (3x - 1)}{15}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $10x^2 + 11x - 6 = 0$ b) $-25x^2 + 25x - 4 = 0$ c) $(2x - 1) \cdot (3x + 1) = 6$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones, calculando previamente alguna solución entera:

a) $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$ b) $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = 0$ c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales. Recuerda que al final del proceso debes comprobar cuáles de las soluciones halladas son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $x + \sqrt{x} = 132$ c) $2x - 1 - \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

b) $2x - 3 + \sqrt{2x + 3} = 6$ d) $3\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{3(2x - 1)}$

6. Aplica el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x^2 + 3xy = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ y^2 + 2xy = -1 \end{cases}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales realizando un cambio de incógnita en los casos que consideres necesario:

a) $4^{2x-1} = 64$ b) $2^{2x^2-3x} = 4$ c) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $5 \log x = 10$ b) $\log (x - 27) = \log x - 1$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x + 1}{2} > 2 + \frac{x + 8}{2}$ b) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x - 2}{4} - \frac{x - 3}{8} < \frac{59}{8}$ c) $2x^2 - x - 6 \leqslant 0$

10. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ x + 4y + z = -5 \\ x + 3y + z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ x - 4y + 3z = 15 \\ 2x - y + 4z = 17 \end{cases}$

11. La suma de las edades de tres amigos es 52 años. Se sabe que Juan y Eva tienen la misma edad y que la suma de las edades de Eva y de Ana es 35 años. Calcula las edades de los tres.

SOLUCIONES

1. a) $5x + 6x - 4x = 15 + 22x \Rightarrow x = -1$

b) $6x + 15 = 30 + 15x - 5x - 15 \Rightarrow x = 0$

c) $10x - 4 - 7x + 3 = 4x - 4 \Rightarrow x = 3$

2. a) $2(9x^2 - 1) =$

$= 9(x^2 - 4x - 5) + 9x^2 + 26x - 3 + 16$

$18x^2 - 2 = 18x^2 - 10x - 32 \Rightarrow x = -3$

b) $2(9x^2 - 49) =$

$= 6(x^2 - 4x + 4) + 3(4x^2 + 4x + 1)$

$12x = 125 \Rightarrow x = \dfrac{125}{12}$

c) $x^2 + x + 3(x^2 - 10x + 25) + 5(x^2 + 6x + 9) =$

$= 9x^2 - 1$

$x = -121$

3. a) $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{20} \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}, x = -\dfrac{3}{2}$

b) $x = \dfrac{-25 \pm \sqrt{625 - 400}}{-50} \Rightarrow x = \dfrac{1}{5}, x = \dfrac{4}{5}$

c) $6x^2 - x - 7 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{12} \Rightarrow x = \dfrac{7}{6}, x = -1$

4. a) $(x + 2)(6x^2 + x - 2) = 0$

$x = -2, x = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{2}{3}$

b) $(x - 1)(12x^2 - 7x + 1) = 0$

$x = 1, x = \dfrac{1}{3}, x = \dfrac{1}{4}$

c) $(x + 1)(x - 1) \cdot (4x^2 - 1) = 0$

$x = 1, x = -1, x = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$

5. a) $x = (132 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 265x + 17\,424 = 0$
$x = 121 (x = 144$ falsa)

b) $2x + 3 = (9 - 2x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 39 = 0$
$x = 3 (x = 6{,}5$ falsa)

c) $(2x - 1)^2 = 6x^2 - 12x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1, x = 3$

d) $9(3x - 1) = 12(2x - 1) \Rightarrow 3x = -3$

$(x = -1$ falsa).

La ecuación no tiene ninguna solución.

6. a) $\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 2x^2 + 3x(5 - 2x) = 14 \end{cases}$

$-4x^2 + 15x - 14 = 0$

$(x = 2, y = 1); \left(x = \dfrac{7}{4}, y = \dfrac{3}{2}\right)$

b) $\begin{cases} x = 4 + 3y \\ y^2 + 2y(4 + 3y) = -1 \end{cases}$

$7y^2 + 8y + 1 = 0$

$\left(x = \dfrac{25}{7}, y = -\dfrac{1}{7}\right); (x = 1, y = -1)$

7. a) $4^{2x-1} = 4^3 \Rightarrow x = 2$

b) $2^{2x^2-3x} = 2^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x = 2, x = -\dfrac{1}{2}$

c) $3 \cdot 3^x + \dfrac{1}{3} \cdot 3^x = 30 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2$

$x = 2$

8. a) $\log x = 2 = \log 100 \Rightarrow x = 100$

b) $\log (x - 27) = \log x - \log 10 = \log \left(\dfrac{x}{10}\right)$

$x - 27 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 30$

9. a) $x > 11$

b) $5x - 5 < 59 \Rightarrow x < \dfrac{64}{5}$

c) $(x - 2)(2x + 3) \leqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$

10. a) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ 6y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 16 \\ 33z = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

11. Edades (en años): Juan x, Eva x y Ana $35 - x$.

$x + x + 35 - x = 52 \Rightarrow x = 17$

Por tanto, Juan y Eva tienen 17 años cada uno y Ana tiene 18 años.

5 Razones trigonométricas

1. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales.

a) sen 32° c) tg 17° e) sec 153° g) sen 23°15′ i) tg 133°43′ k) sec 121°32′33″

b) cos 43° d) cosec 213° f) cotg 320° h) cos 47°32′ j) cosec 34°43′12″ l) cotg 2°2′2″

2. Con ayuda de la calculadora científica, halla las siguientes razones trigonométricas expresándolas con cuatro decimales. Los ángulos están dados en radianes.

a) sen 2 c) tg 4 e) sec 6 g) sen 2,5 i) tg 4,5 k) sec 3,25

b) cos 3 d) cosec 5 f) cotg 1,5 h) cos 3,5 j) cosec 5,5 l) cotg 4,75

3. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos α positivos y menores de 360° y tales que:

a) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}32$ c) $\text{tg}\ \alpha = 1{,}05$ e) $\sec \alpha = 2$

b) $\cos \alpha = -0{,}43$ d) $\text{cosec}\ \alpha = -1{,}1$ f) $\text{cotg}\ \alpha = -2$

4. Con la ayuda de la calculadora científica, halla los ángulos α positivos y menores de 2π radianes y tales que:

a) $\text{sen}\ \alpha = -0{,}42$ c) $\text{tg}\ \alpha = -1{,}25$ e) $\sec \alpha = 1{,}35$

b) $\cos \alpha = 0{,}4$ d) $\text{cosec}\ \alpha = 1{,}34$ f) $\text{cotg}\ \alpha = -1$

5. El ángulo α pertenece al primer cuadrante. Calcula las otras razones trigonométricas de α sabiendo que $\text{sen}\ \alpha = 0{,}53$.

6. El ángulo α pertenece al tercer cuadrante. Calcula las otras razones trigonométricas de α sabiendo que $\text{tg}\ \alpha = 1{,}25$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2 + \text{tg}\ x = 1$ b) $2\ \text{sen}^2 x + 4 \cos^2 x = \dfrac{7}{2}$ c) $3\ \text{sen}\ x = \sqrt{3} \cos x$

8. Resuelve la ecuación trigonométrica $\text{sen}\ x + 2 \cos^2 x = 2$.

9. Expresa las siguientes razones trigonométricas mediante alguna razón de un ángulo del primer cuadrante:

a) sen 216° b) cos 125° c) tg 333° d) cosec 130° e) sec 225° f) cotg 273°

10. Expresa las siguientes razones trigonométricas mediante alguna razón de un ángulo del primer cuadrante:

a) sen 1 330° b) cos 2 450° c) tg 3 125° d) sec 1 440°

11. En los siguientes casos de triángulos rectángulos se proporcionan ciertos datos. Calcula el valor de las incógnitas indicadas:

a) Datos: a = 12 cm b = 13 cm B = 90° Incógnitas: c y C

b) Datos: b = 25 cm C = 73°45′ B = 90° Incógnitas: a y c

12. La sombra de una torre, cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 42°, mide 12,5 metros. Calcula la altura de la torre.

13. Desde un punto situado a 10 m de una torre, una persona que mide 180 cm ve el extremo más alto bajo un ángulo de 43°. Calcula la altura de la torre.

SOLUCIONES

1. a) 0,5299 e) −1,1223 i) −1,0458
b) 0,7314 f) −1,1918 j) 1,7557
c) 0,3057 g) 0,3947 k) −1,9116
d) −1,8361 h) 0,6752 l) 28,1587

2. a) 0,9093 e) 1,0415 i) 4,6373
b) −0,98999 f) 0,0709 j) −1,4174
c) 1,1578 g) 0,5985 k) −1,0059
d) −1,0428 h) −0,9365 l) −0,0376

3.
a) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}32 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 18{,}66... = 18°39'46'' \\ \alpha = 161{,}33... = 161°20' \end{cases}$

b) $\cos \alpha = -0{,}43 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 115{,}46... = 115°28'3'' \\ \alpha = 244{,}53... = 244°31' \end{cases}$

c) $\text{tg}\ \alpha = 1{,}05 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 46{,}39... = 46°23'49'' \\ \alpha = 226{,}39... = 226°23' \end{cases}$

d) $\text{cosec}\ \alpha = -1{,}1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 294{,}62... = 294°37'12'' \\ \alpha = 245{,}38... = 245°22'48'' \end{cases}$

e) $\sec \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60° \\ \alpha = 300° \end{cases}$

f) $\text{cotg}\ \alpha = -2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 333{,}43... = 333°26'6'' \\ \alpha = 153{,}43... = 153°26'6'' \end{cases}$

4. a) $\alpha = 5{,}85$ rad o $\alpha = 3{,}58$ rad
b) $\alpha = 1{,}16$ rad o $\alpha = 5{,}12$ rad
c) $\alpha = 5{,}39$ rad o $\alpha = 2{,}25$ rad
d) $\alpha = 0{,}84$ rad o $\alpha = 2{,}3$ rad
e) $\alpha = 0{,}74$ rad o $\alpha = 5{,}55$ rad
f) $\alpha = 5{,}5$ rad o $\alpha = 2{,}36$ rad

5. $\cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ \alpha} = \sqrt{1 - 0{,}2809} \approx 0{,}85$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} \approx 0{,}62$ $\text{cosec}\ \alpha \approx 1{,}89$

$\sec \alpha \approx 1{,}18$ $\text{cotg}\ \alpha \approx 1{,}61$

6. $\sec \alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2\ \alpha} = -\sqrt{1 + 1{,}562} \approx -1{,}6$

$\cos \alpha \approx -0{,}63$ $\text{sen}\ \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tg}\ \alpha \approx -0{,}79$

$\text{cosec}\ \alpha \approx -1{,}27$ $\text{cotg}\ \alpha = 0{,}8$

7. a) $2 + \text{tg}\ x = 1 \Rightarrow \text{tg}\ x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 135° + 360°k \\ x = 315° + 360°k \end{cases} \quad k \in Z$

b) $2\ \text{sen}^2\ x + 4\cos^2 x = \dfrac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\ \text{sen}^2\ x + 4(1 - \text{sen}^2\ x) = \dfrac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\ \text{sen}^2\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + 360°k \\ \text{sen}\ x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 210° + 360°k \end{cases}$

$x = 150° + 360°k \qquad x = 330° + 360°k$

c) $3\ \text{sen}\ x = \sqrt{3}\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x} = \text{tg}\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 30° + 360°k \\ x = 210° + 360°k \end{cases}$

8. $\text{sen}\ x + 2\cos^2 x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ x + 2 - 2\ \text{sen}^2\ x = 2 \Rightarrow$

$\text{sen}\ x(1 - 2\ \text{sen}\ x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\ x = 0 \Rightarrow x = 0° + 360°k \\ \text{sen}\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + 360°k \end{cases}$

$x = 150° + 360°k$

9. a) −sen 36° d) cosec 50°
b) −cos 55° e) −sec 45°
c) −tg 27° f) −cotg 87°

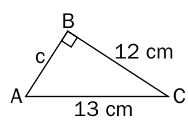
10. a) $\text{sen}\ 1\,330° = \text{sen}\ (250° + 3 \cdot 360°) =$
$= \text{sen}\ 250° = -\text{sen}\ 70°$

b) $\cos 2\,450° = \cos (290° + 6 \cdot 360°) =$
$= \cos 290° = \cos 70°$

c) $\text{tg}\ 3\,125° = \text{tg}\ (245° + 8 \cdot 360°) = \text{tg}\ 245° =$
$= \text{tg}\ 65°$

d) $\sec 1\,440° = \sec (0° + 4 \cdot 360°) = \sec 0°$

11. a)

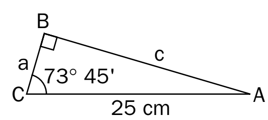


$c = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm

$\cos C = \dfrac{a}{b} = \dfrac{12}{13}$

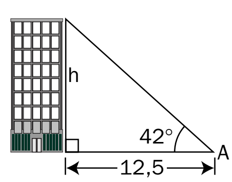
$C = 22{,}61... \approx 22°37'11''$

b)



$a = b \cdot \cos C \approx 7$ cm
$c = b \cdot \text{sen}\ C \approx 24$ cm

12. Se hace un dibujo con los datos del problema:

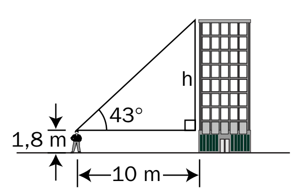


$\text{tg}\ 42° = \dfrac{h}{12{,}5}$

$h = 12{,}5 \cdot \text{tg}\ 42°$

$h \approx 11{,}26$ m

13. Se hace un dibujo con los datos del problema:



$\text{tg}\ 43° = \dfrac{h - 1{,}8}{10}$

$h = 10 \cdot \text{tg}\ 43° + 1{,}8$

$h \approx 11{,}13$ m

6 Resolución de triángulos

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 20 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula el valor del otro cateto, así como la medida de su ángulo opuesto.

2. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a 24 cm y el otro mide 10 cm. Calcula el valor de la hipotenusa, así como la medida de los dos ángulos agudos.

3. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. En todos los casos el ángulo de 90° es el C.

a) $c = 230$ m, $B = 35°$ b) $b = 75$ m, $a = 100$ m

4. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 10$ cm $b = 12$ cm $c = 14$ cm

b) $a = 10$ cm $B = 30°$ $C = 50°$

5. Calcula el área del triángulo sabiendo que $A = 90°$, $b = 30$ cm, $c = 16$ cm.

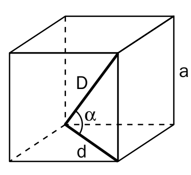
6. Los lados de un rectángulo miden 10 y 5 cm, respectivamente. Calcula el valor del ángulo que una de las diagonales forma con el lado menor del rectángulo.

7. Una señal de carretera indica que la inclinación en ese tramo es del 12 %, lo cual quiere decir que por cada 100 m que se recorre se asciende 12 m verticales. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

8. Calcula la medida de la altura sobre el lado mayor de un triángulo cuyos lados miden 10, 15 y 20 cm, respectivamente.

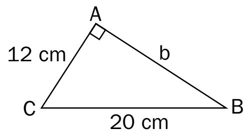
9. Desde un cierto punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 45°. Si nos alejamos 2 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 25°. Calcula la altura del pino.

10. Calcula el ángulo α que forman la diagonal de la cara y la diagonal del cubo representadas en la figura.



SOLUCIONES

1.

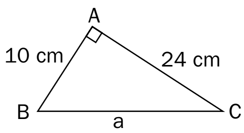


$c = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

$\cos C = \dfrac{12}{20}$

$C = 53{,}13... = 53°7'48''$

2.



$a = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ cm

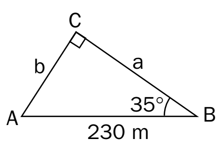
$\text{tg } B = \dfrac{10}{24}$

$B = 22{,}61... = 22°37'11''$

$\text{tg } C = \dfrac{24}{10}$

$C = 67{,}38... = 67°22'48''$

3. a)

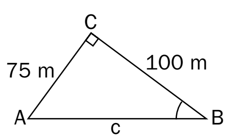


$b = 230 \cdot \text{sen } 35° \approx 131{,}9$ m

$a = 230 \cdot \cos 35° \approx 188{,}4$ m

$A = 90° - 35° = 55°$

b)



$c = \sqrt{75^2 + 100^2} = 125$ cm

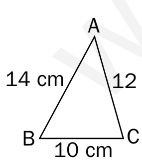
$\text{tg } B = \dfrac{75}{100}$

$B = 36{,}86... \approx 36°52'12''$

$\text{tg } A = \dfrac{100}{75}$

$A = 53{,}13... \approx 53°7'48''$

4. a)



$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \dfrac{240}{336}$

$A = 44{,}41... \approx 44°24'55''$

$B = 57{,}12... \approx 57°7'18''$

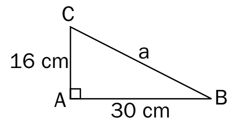
$C = 78{,}46... \approx 78°27'47''$

b) $A = 100°$

$b = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 100°} \approx 5{,}1$ cm

$c = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 50°}{\text{sen } 100°} \approx 7{,}8$ cm

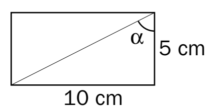
5.



$S = \dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240$ cm^2

El área del triángulo es 240 cm^2.

6.

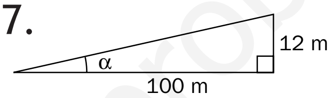


$\text{tg } \alpha = \dfrac{10}{5} = 2$

$\alpha = 63{,}43... = 63°26'6''$

El ángulo mide 63°26'6''.

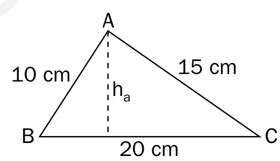
7.



$\text{tg } \alpha = 0{,}12$

$\alpha = 6{,}84... = 6°50'34''$

8.

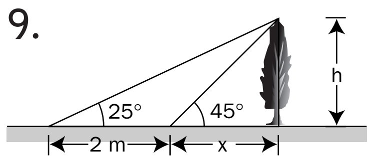


$S = \dfrac{20 \cdot h_a}{2} = \sqrt{22{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 2{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_a \approx 7{,}26$ cm

La altura del triángulo mide, aproximadamente, 7,25 cm.

9.



$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 25° = \dfrac{h}{2 + x} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x \cdot \text{tg } 25° + 2 \cdot \text{tg } 25° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2 \cdot \text{tg } 25°}{1 - \text{tg } 25°} = \dfrac{0{,}93...}{0{,}53...} \approx 1{,}75$

El pino mide, aproximadamente, 1,75 m.

10. $\text{tg } \alpha = \dfrac{a}{d} = \dfrac{a}{\sqrt{2a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = 36{,}26... \approx 35°15'51''$

7 Los vectores en el plano

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3) + (-3, -1)$

b) $(-2, 4) + (-1)\,[(2, -1) + (-1)\,(-3, -4)]$

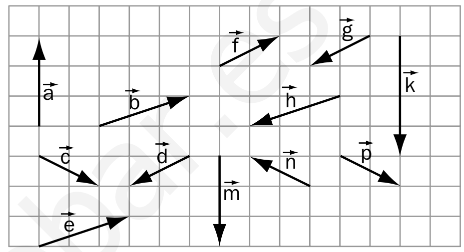
c) $(-2)\,(3, -3) + 3\,(-3, 3) + (1, 0)$

d) $(1, 2) + (-2)\,(3, 4) + (-3)\,(5, -6)$

e) $3[2(-2, 3) + (-2)\,(3, -4)] + (-1, -2)$

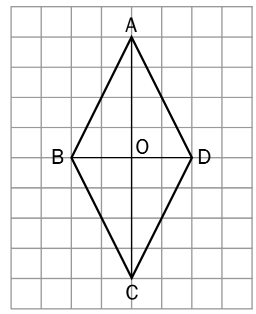
f) $\dfrac{1}{2}\,(-1, 3) + (-2)\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$

2. Dados los vectores de la figura, decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.



$\vec{a} = \vec{m}$	$\vec{m} = -\vec{k}$	$\vec{b} = -\vec{h}$
$\vec{b} = \vec{e}$	$\vec{f} = -\vec{g}$	$\vec{g} = \vec{d}$
$\vec{c} = -\vec{n}$	$\vec{c} = -\vec{p}$	$\vec{n} = \vec{p}$

3. Dado el rombo de vértices ABCD, completa las siguientes igualdades:



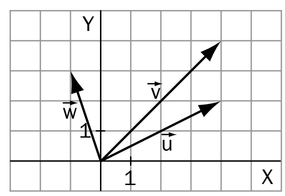
Ejemplo: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-2, -4) + (2, -4) = (0, -8) = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$	$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

4. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 4)$, $\vec{v} = (2, 5)$ b) $\vec{u} = (-2, 4)$, $\vec{v} = (2, -1)$ c) $\vec{u} = (-3, -4)$, $\vec{v} = (2, 0)$

5. Dados los vectores de la figura, calcula el valor de las siguientes operaciones:



a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 3\vec{w}) - \vec{w} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

6. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

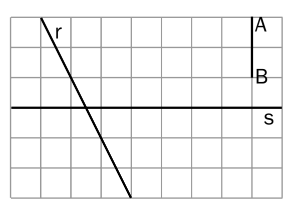
a) $\vec{u} = (3, 4)$ b) $\vec{v} = (-6, 8)$ c) $\vec{w} = (-24, -32)$

7. Consideramos los vectores $\vec{u} = (2, -2)$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Dibújalos y calcula el ángulo que forman.

8. Calcula un vector unitario $\vec{y}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (16, -30)$.

9. Calcula un vector unitario $\vec{y}$ que sea ortogonal al vector $\vec{u} = (15, -8)$.

10. Dadas las rectas r y s y el segmento AB de la figura, traza otro segmento CD de la misma longitud que AB y paralelo a él y tal que el punto C pertenezca a la recta s y el punto D a la r.



SOLUCIONES

1. a) $(2, -4)$ d) $(-20, 12)$

b) $(-7, 1)$ e) $(-31, 40)$

c) $(-14, 15)$ f) $\left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{2}\right)$

2. $\vec{a} = \vec{m}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.
$\vec{b} = \vec{e}$ verdadera.
$\vec{c} = -\vec{n}$ verdadera.
$\vec{m} = -\vec{k}$ falsa, ya que no tienen el mismo módulo.
$\vec{f} = -\vec{g}$ verdadera.
$\vec{c} = -\vec{p}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.
$\vec{b} = -\vec{h}$ verdadera.
$\vec{g} = \vec{d}$ verdadera.
$\vec{n} = \vec{p}$ falsa, ya que no tienen el mismo sentido.

3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = (-2, -4) + (2, 0) = (0, -4) = \overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = (0, -4) + (2, 4) = (2, 0) = \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (0, 8) + (-2, -4) = (-2, 4) = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (2, -4) + (2, 4) = (4, 0) = \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = (2, 0) + (-2, -4) = (0, -4) = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = (2, 4) + (-2, -4) = (0, 0) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = (-2, 0) + (2, 0) = (0, 0) = \vec{0}$

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = (2, 4) + (-2, 4) + (-2, -4) =$
$= (-2, 4) = \overrightarrow{CB}$

4. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (2, 5) = 6 + 20 = 26$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 4) \cdot (2, -1) = -4 - 4 = -8$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -4) \cdot (2, 0) = -6 + 0 = -6$

5. $\vec{u} = (4, 2)$ $\vec{v} = (4, 4)$ $\vec{w} = (-1, 3)$

a) $(4, 2) \cdot (4, 4) + (4, 2) \cdot (-1, 3) =$
$= 16 + 8 - 4 + 6 = 26$

b) $(4, 2) \cdot (3, 7) - (-1, 3) \cdot (0, -2) =$
$= 12 + 14 + 6 = 32$

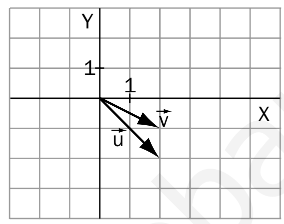
c) $(4, 2) \cdot (5, 13) - (-1, 3) \cdot (4, -2) =$
$= 20 + 26 + 4 + 6 = 56$

6. a) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

c) $|\vec{w}| = \sqrt{(-24)^2 + (-32)^2} = \sqrt{1\,600} = 40$

7.



$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{4 + 2}{\sqrt{4 + 4}\,\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{40}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 18{,}43... \approx 18°26'6''$

8. Para obtener un vector en la dirección de $\vec{u}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{u}$ por su módulo:

$$\vec{y} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{16}{\sqrt{16^2 + (-30)^2}}, \frac{-30}{\sqrt{16^2 + (-30)^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{16}{34}, -\frac{30}{34}\right) = \left(\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right)$$

9. Un vector ortogonal al vector $\vec{u} = (15, -8)$ es $\vec{v} = (8, 15)$ ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 120 - 120 = 0$.

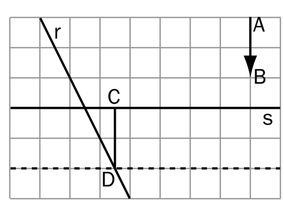
Para obtener un vector en la dirección de $\vec{v}$ y que sea unitario, basta dividir $\vec{v}$ por su módulo:

$$\vec{y} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{8}{\sqrt{8^2 + 15^2}}, \frac{15}{\sqrt{8^2 + 15^2}}\right) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$

10. Se traslada la recta s según el vector $\overrightarrow{AB}$.

La intersección de dicha recta con la r da el extremo D del segmento buscado.

El otro extremo, C, se obtiene como traslación del punto D según el vector guía $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.



8 La recta en el plano

1. En cada uno de los siguientes casos, calcula las coordenadas del vector cuyo origen es el punto A y cuyo extremo es el punto B:

a) A(2, 3) y B(4, 5) b) A(−2, −4) y B(−4, 5)

2. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3)$ se sabe que P(−1, 2). Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{AB} = (-2, 6)$ se sabe que B(−2, −4). Calcula las coordenadas del origen A.

3. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los segmentos que tienen por extremos los puntos A y B en los siguientes casos:

a) A(2, 3) y B(−4, 3) b) A(−2, 4) y B(−4, 6)

4. Calcula la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, la ecuación general y la ecuación explícita de la recta r en los siguientes casos:

a) r pasa por el punto A(−1, 3) y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2)$.

b) Pasa por los puntos A(−1, 2) y B(−3, 4).

c) Pasa por el punto A(−3, 4) y su pendiente vale m = 2.

5. Calcula el punto de intersección de las siguientes rectas:

a) r: $2x + 3y - 5 = 0$; s: $-4x + 3y + 1 = 0$

b) r: $-2x + 4y - 12 = 0$; s: $x + 3y - 4 = 0$

c) r: $3x + 4y - 7 = 0$; s: $-4x + 3y + 26 = 0$

6. Comprueba si las siguientes rectas son secantes, paralelas o coincidentes. En el caso de que sean secantes, calcula el correspondiente punto de corte.

a) r: $2x + 3y - 5 = 0$; s: $-4x - 6y + 1 = 0$

b) r: $-2x + 4y - 12 = 0$; s: $3x - 6y + 18 = 0$

c) r: $x + 2y - 3 = 0$; s: $-2x + 4y - 6 = 0$

7. Calcula la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2, −3) y es paralela a la recta r en los siguientes casos:

a) r: $2x + y = 0$ b) r: $2x - 3y + 7 = 0$ c) r: $y + 8 = 0$

8. Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos A, B y C están alineados y en cuáles forman triángulo.

a) A(−1, −5), B(0, −3), C(−2, −7) b) A(1, 2), B(2, 7), C(−1, 3)

9. Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(1, 2), B(2, 7) y C(−1, 3).

10. Dado el triángulo de vértices A(3, 1), B(2, −2), C(0, 0).

a) Calcula las coordenadas de su baricentro.

b) Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por el baricentro y son paralelas a cada uno de los lados del triángulo.

c) Escribe la ecuación del haz de rectas cuyo vértice es el baricentro del triángulo.

11. Calcula el valor de k para que la recta $-2kx + (3k - 2)y - k = 0$ pase por el punto A(−1, 5).

12. Calcula el valor de k para que la recta $x + (1 + k)y - 3 - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de cuatro unidades cuadradas de área.

SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 9)$

2. a) $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \Rightarrow \vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ}$

$\vec{q} = (-1, 2) + (5, 3) = (4, 5) \Rightarrow Q = (4, 5)$

b) $\vec{a} = \vec{b} - \overrightarrow{AB}$

$\vec{a} = (-2, -4) - (-2, 6) = (0, -10) \Rightarrow A = (0, -10)$

3. a) $\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{1}{2}(2 - 4) = -1 \\ y_m = \dfrac{1}{2}(3 + 3) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-1, 3)$

b) $\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{1}{2}(-2 - 4) = -3 \\ y_m = \dfrac{1}{2}(4 + 6) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-3, 5)$

4. a) $\vec{x} = (-1, 3) + t(-3, -2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

$\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y - 3}{-2} \Rightarrow 2x - 3y + 11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}$

b) $\vec{x} = (-1, 2) + t(-2, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

$\dfrac{x + 1}{-2} = \dfrac{y - 2}{2} \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -x + 1$

c) $y - 4 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 10$

$2x - y + 10 = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 10) + t(1, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 10 + 2t \end{cases}$

5. Se resuelve cada uno de los sistemas y se obtiene:

a) $P(1, 1)$ b) $P(-2, 2)$ c) $P(5, -2)$

6. a) $\dfrac{2}{-4} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{1} \Rightarrow$ rectas paralelas

b) $\dfrac{-2}{3} = \dfrac{4}{-6} = \dfrac{-12}{18} \Rightarrow$ rectas coincidentes

c) $\dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{2}{4} \Rightarrow$ rectas secantes con punto de corte $P\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

7. a) s: $2x + y - 1 = 0$

b) s: $2x - 3y - 13 = 0$

c) s: $y + 3 = 0$

8. A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

a) Están alineados, pertenecen a la recta $y = 2x - 3$.

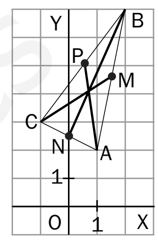
b) Forman triángulo.

9. $M\left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$, $N\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

PA: $y = -6x + 8$

NB: $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{5}{2}$

MC: $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{18}{5}$



10. a) $\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{1}{3}(3 + 2 + 0) = \dfrac{5}{3} \\ y_G = \dfrac{1}{3}(1 - 2 + 0) = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow G\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

b) Recta paralela a AB y que pasa por G:

$\dfrac{x - \dfrac{5}{3}}{-1} = \dfrac{y + \dfrac{1}{3}}{-3} \Rightarrow y = 3x - \dfrac{16}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x - 3y - 16 = 0$

Recta paralela a AC y que pasa por G:

$\dfrac{x - \dfrac{5}{3}}{-3} = \dfrac{y + \dfrac{1}{3}}{-1} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 9y - 8 = 0$

Recta paralela a BC y que pasa por G:

$\dfrac{x - \dfrac{5}{3}}{-2} = \dfrac{y + \dfrac{1}{3}}{2} \Rightarrow y = -x + \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 3y - 4 = 0$

c) $\alpha(9x - 3y - 16) + \beta(3x - 9y - 8) = 0$

11. $2k + 5(3k - 2) - k = 0 \Rightarrow 16k - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{5}{8}$

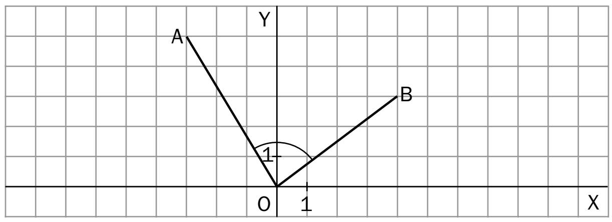
12. $x + (1 + k)y = 3 + k \Rightarrow \dfrac{x}{3 + k} + \dfrac{y}{\dfrac{3 + k}{1 + k}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \dfrac{(3 + k)^2}{2 + 2k} = 4 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1$

9 Problemas métricos

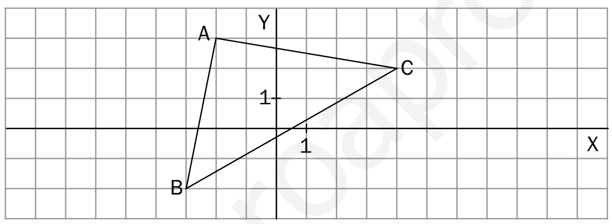
1. Calcula la distancia que separa a los puntos A y B, así como la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ de la figura.



2. Calcula la medida de los lados del hexágono de vértices: A(2, 1), B(1, 2) C(−1, 2), D(−2, −1), E(−1, −3), F(2, −2).

3. Calcula los ángulos de cuadrilátero cuyos vértices son: A(2, 2), B(2, 4), C(−1, 1), D(−1, −1).

4. Calcula la medida de los lados y de los ángulos del triángulo de la figura.



5. Demuestra que las siguientes rectas son paralelas y, después, calcula la distancia que las separa:

r: $2x + y - 2 = 0$ s: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$

6. Dadas las rectas r: $3x - y + 5 = 0$ y s: $2x + 3y - 4 = 0$ y el punto P(3, 4):

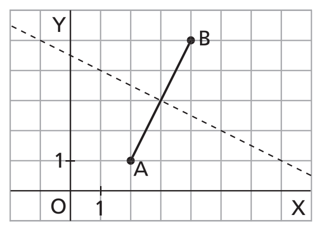
a) Calcula la suma de las distancias que separan P de cada una de las rectas.

b) Calcula la distancia que separa a P del punto de corte de ambas rectas.

7. Dados los puntos A(2, 1) y B(4, 5):

a) Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A y B. ¿Qué verifican todos los puntos de este lugar geométrico?

b) Calcula las coordenadas de un punto situado en el eje de ordenadas y que equidiste de los puntos A y B.



8. Calcula las coordenadas de los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

r: $x + 2y - 4 = 0$ s: $2x - 3y - 1 = 0$ t: $4x + y + 5 = 0$

9. Calcula las coordenadas de un punto que pertenezca a la recta r: $x - 2y + 3 = 0$ y tal que la distancia que le separa del punto P(6, −1) sea igual a 5 unidades de longitud.

10. Se considera la recta que tiene por ecuación r: $x - y + 4 = 0$ y los puntos que tienen por coordenadas A(0, 7) y B(3, 2):

a) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por A y por B.

b) Calcula las ecuaciones de las bisectrices determinadas por las rectas r y s.

SOLUCIONES

1. $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

$$\cos \widehat{AOB} = \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-12 + 15}{\sqrt{34 \cdot 5}}$$

$\widehat{AOB} = 84{,}09... = 84°5'38''$

2. $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$

Calculamos del mismo modo:

$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4} = 2$

$d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{10}$

$d(D, E) = |\overrightarrow{DE}| = \sqrt{5}$

$d(E, F) = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{10}$

$d(F, A) = |\overrightarrow{FA}| = \sqrt{9} = 3$

3. $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (0, -2)$, $\overrightarrow{DA} = (3, 3)$

Por tanto, se trata de un paralelogramo.

$$\cos \widehat{DAB} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-6}{\sqrt{18}\,\sqrt{4}}$$

$\widehat{DAB} = 135° \Rightarrow \widehat{BCD} = 135°$

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{6}{\sqrt{4}\,\sqrt{18}}$$

$\widehat{ABC} = 45° \Rightarrow \widehat{CDA} = 45°$

4. $A(-2, 3)$, $B(-3, -2)$, $C(4, 2)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -5)$, $\overrightarrow{BC} = (7, 4)$, $\overrightarrow{CA} = (-6, 1)$

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

$d(B, C) = \sqrt{65}$ $\qquad d(C, A) = \sqrt{37}$

$$\cos \widehat{CAB} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6 + 5}{\sqrt{26}\,\sqrt{37}}$$

$\widehat{CAB} = 91{,}84... = 91°50'51''$

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{27}{\sqrt{26}\,\sqrt{65}}$$

$\widehat{ABC} = 48{,}94... = 48°56'42'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BCA} = 39{,}20... = 39°12'26''$

5. $$\left.\begin{array}{l} s: \dfrac{x - 2}{-2} = \dfrac{y + 1}{4} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \\ r: 2x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

$$d(r, s) = \frac{|-2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

6. a) $$d(P, r) + d(P, s) = \frac{|9 - 4 + 5|}{\sqrt{9 + 1}} + \frac{|6 + 12 - 4|}{\sqrt{4 + 9}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10}} + \frac{14}{\sqrt{13}} = \sqrt{10} + \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

b) Punto de corte: $Q(-1, 2)$

$d(P, Q) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

7. a) Mediatriz del segmento AB:

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2}$

$x + 2y - 9 = 0$

Todos los puntos de esta recta equidistan de A y de B.

b) $\begin{cases} x + 2y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ El punto es $P\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$

8. $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, 1)$

$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 3)$

$\begin{cases} 4x + y + 5 = 0 \\ 2x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -1)$

Base $= d(A, B) = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Recta que pasa por A y por B: $r: x + 2y - 4 = 0$

$$\text{Altura} = d(C, r) = \frac{|-1 - 2 - 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = 7 \text{ unidades cuadradas}$$

9. $r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow$ Sea $Q(-3 + 2t, t)$

$$d(Q, P) = \sqrt{(9 - 2t)^2 + (-1 - t)^2} = 5 \Rightarrow t = \frac{19}{5},\ t = 3$$

El problema tiene dos soluciones:

$Q_1\left(\dfrac{23}{5}, \dfrac{19}{5}\right)$, $Q_2(3, 3)$

10. a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y - 7}{2 - 7} \Rightarrow -5x = 3y - 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow s: 5x + 3y - 21 = 0$

b) $$\frac{|x - y + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|5x + 3y - 21|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{34}(x - y + 4) = \sqrt{2}(5x + 3y - 21) \\ \sqrt{34}(x - y + 4) = -\sqrt{2}(5x + 3y - 21) \end{cases}$$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$(\sqrt{17} - 5)x - (\sqrt{17} + 3)y + 4\sqrt{17} + 21 = 0$

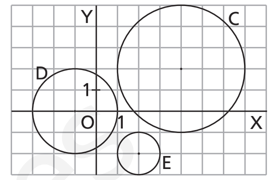
$(\sqrt{17} + 5)x - (\sqrt{17} - 3)y + 4\sqrt{17} - 21 = 0$

10 Cónicas

1. Calcula la ecuación de las circunferencias cuyo centro y radio se indican a continuación:

a) Centro $(-2, 2)$ Radio $r = 3$ b) Centro $(-2, -3)$ Radio $r = \sqrt{2}$

2. Calcula las ecuaciones de las circunferencias C, D y E que aparecen en la figura:



3. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro situado en el punto $C(-2, 3)$ y que pasa por el punto de coordenadas $A(-2, 5)$. Calcula previamente la medida del radio.

4. Uno de los diámetros de una cierta circunferencia es el segmento determinado por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, -4)$. Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia, la medida del radio y escribe su ecuación analítica.

5. Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C cuyas coordenadas cartesianas son $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(0, -2)$.

6. Halla la ecuación reducida de la elipse sabiendo que sus focos están situados en los puntos $F(12, 0)$ y $F'(-12, 0)$ y que su eje mayor mide 26 unidades de longitud. Represéntala y calcula la medida de su eje menor, su distancia focal, su excentricidad y las coordenadas de sus vértices.

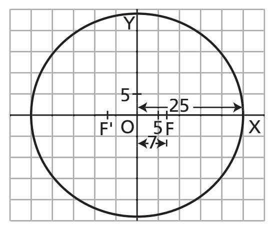
7. Halla la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que sus focos están situados en los puntos $F(17, 0)$ y $F'(-17, 0)$ y que su eje mayor mide 30 unidades de longitud. Represéntala y calcula la medida de su eje menor, su distancia focal, su excentricidad, las ecuaciones de sus asíntotas y las coordenadas de sus vértices.

8. Dada la gráfica de la siguiente elipse:

a) Calcula la medida de sus ejes y de su distancia focal.

b) Calcula su excentricidad e interprétala.

c) Escribe las coordenadas de sus focos y de sus vértices.



9. Dada la gráfica de la siguiente hipérbola:

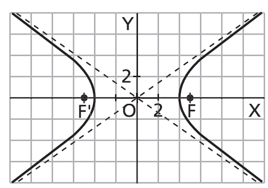
a) Calcula la medida de su eje mayor y de su distancia focal.

b) Calcula su eje menor.

c) Calcula su excentricidad.

d) Escribe las coordenadas de sus focos y de sus vértices.

e) Escribe las ecuaciones de sus asíntotas.



10. Escribe la ecuación de la elipse cuyo centro es el origen de coordenadas y cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas y miden 58 y 40 unidades de longitud, respectivamente. Calcula las coordenadas de los focos y la excentricidad.

11. Escribe la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el origen de coordenadas y cuyos ejes coinciden con los ejes de coordenadas y miden 70 y 24 unidades de longitud, respectivamente. Calcula las coordenadas de los focos y la excentricidad.

12. En cada una de las siguientes parábolas calcula el valor de su parámetro y las coordenadas de su foco:

a) $x^2 = 10y$ b) $x = 2y^2$

13. Calcula la ecuación de la parábola cuyo vértice es el origen de coordenadas y cuyo foco está situado en el punto $F(2, 0)$. Indica el valor del parámetro y la ecuación de la directriz.

SOLUCIONES

1. a) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 11 = 0$

2. C: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$

D: $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

E: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$

3. $r = d(C, A) = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (3 - 5)^2} = 2$

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

4. $C\left(\frac{-1 + 2}{2}, \frac{3 - 4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

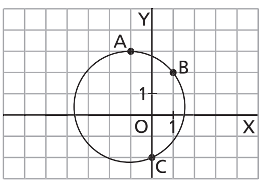
$r = d(C, A) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{58}}{2}$

$x^2 + y^2 - x + y - 14 = 0$

5. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow$

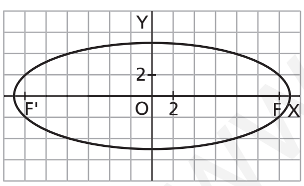
$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 9 - D + 3E + F = 0 \\ 1 + 4 + D + 2E + F = 0 \\ 4 - 2E + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{19}{9} \\ E = \frac{7}{9} \\ F = \frac{50}{9} \end{cases}$$

$9x^2 + 9y^2 + 19x - 7y - 50 = 0$



6. $\begin{cases} c = 12 \\ a = 13 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$

$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \approx 0{,}92$



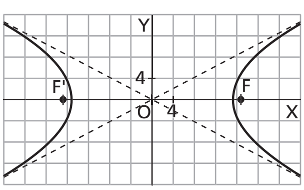
Vértices:
A(13, 0) B(0, 5)
A′(−13, 0) y B′(0, −5)

7. $\begin{cases} c = 17 \\ a = 15 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{289 - 225} = 8$

$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{64} = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{17}{15} \approx 1{,}13$

Vértices: A(15, 0) B(0, 8) A′(−15, 0) y B′(0, −8)



Asíntotas: $y = -\frac{8}{15}x \quad y = \frac{8}{15}x$

8. a) Eje mayor $2a = 2 \cdot 25 = 50$

Distancia focal $2c = 2 \cdot 7 = 14$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$

Eje menor: $2b = 2 \cdot 24 = 48$

b) $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{25} = 0{,}28$. Elipse poco achatada.

c) A(25, 0) B(0, 24) A′(−25, 0) y B′(0, −24)

Focos: F(7, 0) F′(−7, 0)

9. a) Eje mayor $2a = 2 \cdot 4 = 8$

Distancia focal $2c = 2 \cdot 5 = 10$

b) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

Eje menor: $2b = 2 \cdot 3 = 6$

c) $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

d) A(4, 0), B(0, 3), A′(−4 0) y B′(0, −3)

e) Asíntotas: $y = -\frac{3}{4}x \quad y = \frac{3}{4}x$

10. $\begin{cases} a = 29 \\ b = 20 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{441} = 21 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación: } \frac{x^2}{841} + \frac{y^2}{400} = 1 \\ \text{Focos: } F(21, 0),\ F'(-21, 0) \\ \text{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} = \frac{21}{29} \approx 0{,}72 \end{cases}$$

11. $\begin{cases} a = 35 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1\,369} = 37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación: } \frac{x^2}{1\,225} + \frac{y^2}{144} = 1 \\ \text{Focos: } F(37, 0),\ F'(-37, 0) \\ \text{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} = \frac{37}{35} \approx 1{,}06 \end{cases}$$

12. a) $x^2 = 10y = 2 \cdot p \cdot y \Rightarrow p = 5$

$F\left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$

b) $y^2 = \frac{1}{2}x = 2 \cdot p \cdot x \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{8}, 0\right)$

13. La ecuación es de la forma $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$.

Dado que el vértice es el origen de coordenadas y el foco es el punto F(2, 0), el valor del parámetro es:

$\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow y^2 = 8x$

La directriz tiene por ecuación:

d: $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -2$

11 Números complejos

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(3 - 2i) + (-5 + 6i)$

b) $(-4 + 2i) - (6 - 3i)$

c) $2(2 + 3i) - 3(4 - 2i) - 5i$

d) $(1 + i) - (2 + i) + (3 + i) - (4 + i)$

e) $(1 + i) - 2(2 + i) + 3(3 + i) - 4(4 + i)$

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(1 - 3i) \cdot (-2 + 5i)$

b) $(-3 + 3i) \cdot (2 - 3i)$

c) $3(-2 + 2i) \cdot (-3 + 3i) - 2i$

d) $(1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i)$

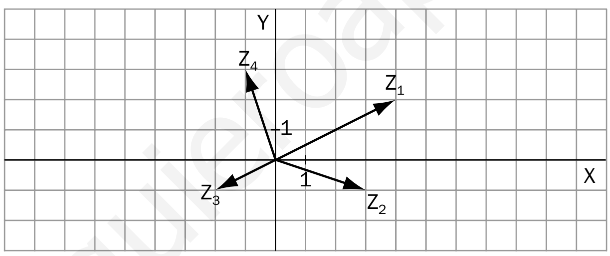
e) $(1 + i) \cdot (1 + 2i) \cdot (1 + 3i) - 2i$

3. Calcula los siguientes cocientes de números complejos:

a) $\dfrac{2 + i}{2 - i}$ b) $\dfrac{2 - 3i}{3 + 2i}$ c) $\dfrac{1 - 5i}{3 - 4i}$ d) $\dfrac{(3 - 2i) \cdot (1 + 4i)}{2 + 2i}$

4. Escribe en forma binómica los números complejos z_1, z_2, z_3 y z_4 representados en la siguiente figura y, después, calcula las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 + z_2 + z_3$ c) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ d) $z_1 - z_2 + z_3 - z_4$



5. Calcula el inverso de los siguientes números complejos:

a) $2 + 2i$ b) $1 - 3i$ c) $-8 + 6i$ d) $-12 - 5i$

6. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $(3 - 2i)^2$ b) $(4 - i)^3$ c) $(-2 + 3i)^4$

7. Representa los siguientes números complejos y escríbelos en su forma polar:

a) $3 + 3i$ b) $3 - \sqrt{3i}$ c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2i}$ d) $-1 + i$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $\left(-2 + 2i\right)^5$ b) $\left(1 + \sqrt{3i}\right)^6$ c) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2i}\right)^{10}$

9. Calcula el valor de las siguientes raíces de números complejos:

a) $\sqrt[3]{3 - 3i}$ b) $\sqrt{2 + \sqrt{12i}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt{-1 - 3i}}$

10. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 - 6z + 10 = 0$ b) $z^4 + z = 0$ c) $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = 0$

11. Calcula el valor de k para que el producto de números complejos $(3 - 2i) \cdot (k + 1 - ki)$:

a) Dé como resultado un número imaginario puro.

b) Dé como resultado un número real.

SOLUCIONES

1. a) $-2 + 4i$ d) -2

b) $-10 + 5i$ e) $-10 - 2i$

c) $-8 + 7i$

2. a) $13 + 11i$ d) $10i$

b) $3 + 15i$ e) $-10 - 2i$

c) $-38\ i$

3. a) $\dfrac{(2+i)^2}{(2-i)\cdot(2+i)} = \dfrac{3+4i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

b) $\dfrac{(2-3i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \dfrac{-13}{13}i = -i$

c) $\dfrac{(1-5i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)} = \dfrac{23-11i}{25} = \dfrac{23}{25} - \dfrac{11}{25}i$

d) $\dfrac{(11+10i)\cdot(2-2i)}{(2+2i)\cdot(2-2i)} = \dfrac{21}{4} - \dfrac{1}{4}i$

4. $z_1 = 4 + 2i$ $z_3 = -2 - i$
$z_2 = 3 - i$ $z_4 = -1 + 3i$

a) $7 + i$ b) 5 c) $4 + 3i$ d) $-i$

5. a) $\dfrac{2-2i}{(2+2i)\cdot(2-2i)} = \dfrac{2-2i}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$

b) $\dfrac{1+3i}{(1-3i)\cdot(1+3i)} = \dfrac{1+3i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$

c) $\dfrac{-8-6i}{(-8+6i)\cdot(-8-6i)} = \dfrac{-8-6i}{100} =$
$= -\dfrac{2}{25} - \dfrac{3}{50}i$

d) $\dfrac{-12+5i}{(-12-5i)\cdot(-12+5i)} = \dfrac{-12+5i}{169} =$
$= -\dfrac{12}{169} + \dfrac{5}{169}i$

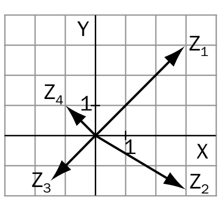
6. a) $5 - 12i$ b) $52 - 47i$ c) $-119 + 120i$

7. a) $z_1 = 3 + 3i = 3\sqrt{2}_{45°}$

b) $z_2 = 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}_{330°}$

c) $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225°}$

d) $z_4 = -1 + i = \sqrt{2}_{135°}$



8. a) $(2\sqrt{2}_{135°})^5 = 128\sqrt{2}_{675°} = 128\sqrt{2}_{315°} =$

$= 128\sqrt{2}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°) =$

$= 128\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 128 - 128i$

b) $(2_{60°})^6 = 64_{360°} = 64(\cos 360° + i \operatorname{sen} 360°) =$
$= 64$

c) $(2_{315°})^{10} = 1\,024_{3\,150°} = 1\,024_{270°} =$
$= 1\,024(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = -1\,024i$

9. a) $\sqrt[3]{3-3i} = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{315°}} =$

$$= \begin{cases} \sqrt[6]{18}_{\frac{315°}{3}} = \sqrt[6]{18}_{105°} \\ \sqrt[6]{18}_{\frac{675°}{3}} = \sqrt[6]{18}_{225°} \\ \sqrt[6]{18}_{\frac{1\,035°}{3}} = \sqrt[6]{18}_{345°} \end{cases}$$

b) $\sqrt{2 + \sqrt{12}i} = \sqrt{4_{60°}} = \begin{cases} 2_{\frac{60°}{2}} = 2_{30°} \\ 2_{\frac{420°}{2}} = 2_{210°} \end{cases}$

c) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240°}} =$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{2}_{\frac{240°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{60°} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{600°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{150°} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{960°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{240°} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{1\,320°}{4}} = \sqrt[4]{2}_{330°} \end{cases}$$

10. a) $z_1 = 3 + i$ $z_2 = 3 - i$

b) $z^4 + z = z(z^3 + 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$
$z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -1,\ z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 =$
$= (z-1)\cdot(z+2)\cdot(z^2+1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = -2,\ z_3 = i,\ z_4 = -i$

11. $(3 - 2i)\cdot(k + 1 - ki) =$
$= 3k + 3 - 3ki - 2ki - 2i + 2ki^2 =$
$= k + 3 - (5k + 2)i$

a) Para $k = -3$ el resultado es un número imaginario puro.

b) Para $k = -\dfrac{2}{5}$ el resultado es un número real.

12 Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ d) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x - 4}$

2. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leqslant -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant -2 \\ |x| + 1 & \text{si } -2 < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

3. Dada la tabla de la función f(x), halla el error que se comete cuando se calcula f(0) mediante interpolación lineal utilizando los otros valores de la tabla.

x	−1	0	3
f(x)	−4	0	8

4. Escribe la fórmula de recurrencia de las potencias positivas de 3.

5. Escribe los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$ c) $a_n = (-1)^{2n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)$

b) $a_n = (-1)^n \cdot (2n + 1)$ d) $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n \cdot n}{2}$

6. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones sabiendo que viene dado mediante una función lineal de n. ¿De qué clase son estas sucesiones?

a) 1, 3, 5, 7, ... b) −5, −11, −17, −23, ...

7. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones sabiendo que viene dado mediante una función cuadrática de n.

a) −2, 1, 6, 13, ... b) 1, 2, 5, 10, ...

8. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones sabiendo que viene dado mediante una función exponencial. ¿De qué clase son estas sucesiones?

a) −9, 27, −81, 243, ... b) 5, 10, 20, 40, ...

9. Dadas las sucesiones $(a_n) = (0, 3, 8, 15, ...)$ y $(b_n) = (2, 3, 4, 5, ...)$ Escribe el término general de las sucesiones:

a) $a_n + b_n$ b) $b_n - a_n$ c) $3\,a_n$ d) $\dfrac{a_n}{b_n}$

10. La antigüedad en años de un automóvil y el número medio de kilómetros, en miles, que ha rodado durante su vida se relacionan en la siguiente tabla:

Antigüedad	2	4	5
Kilómetros	30	50	60

a) Obtén el polinomio de interpolación de segundo grado que expresa los kilómetros recorridos en función de los años de vida del automóvil. ¿Cómo explicas el resultado obtenido?

b) Si un automóvil tiene 3 años, ¿cuántos kilómetros se esperaría que hubiese rodado?

SOLUCIONES

1. a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

d) $[-3, +\infty)$

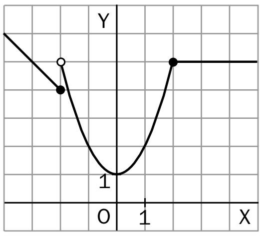
e) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

f) $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

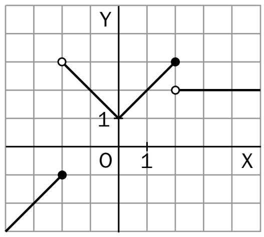
g) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

h) $\mathbb{R} - \{-4, 1\}$

2. a)



b)



3. Para calcular $y = ax + b$, se conoce:

$$\begin{cases} -4 = a \cdot (-1) + b \\ 8 = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $a = 3$, $b = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 3x - 1$.

El valor estimado para $x = 0$ es $y = -1$.

El error en la estimación es, en valor absoluto, 1.

4. $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$

$a_1 = 3$

5. a) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -4$, $a_5 = 5$

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = -7$, $a_4 = 9$, $a_5 = -11$

c) $a_1 = 3$, $a_2 = -7$, $a_3 = -15$, $a_4 = -31$,
$a_5 = -63$

d) $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 2$, $a_3 = -\dfrac{1}{2}$, $a_4 = 3$, $a_5 = -\dfrac{3}{2}$

6. a) $a_n = a(n) = an + b$

Se conoce: $\begin{cases} a_1 = a \cdot 1 + b = 1 \\ a_2 = a \cdot 2 + b = 3 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = 2$, $b = -1$

El término general es $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = a(n) = an + b$

Se conoce: $\begin{cases} a_1 = a \cdot 1 + b = -5 \\ a_2 = a \cdot 2 + b = -11 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = -6$, $b = 1$

El término general es $a_n = -6n + 1$

Son sucesiones aritméticas, ya que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

7. a) $a_n = a(n) = an^2 + bn + c$

Se sabe que $\begin{cases} a_1 = a + b + c = -2 \\ a_2 = 4a + 2b + c = 1 \\ a_3 = 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = 1$, $b = 0$ y $c = -3$.

El término general es $a_n = n^2 - 3$.

b) $a_n = a(n) = an^2 + bn + c$

Se sabe que $\begin{cases} a_1 = a + b + c = 1 \\ a_2 = 4a + 2b + c = 2 \\ a_3 = 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = 1$, $b = -2$ y $c = 2$.

El término general es $a_n = n^2 - 2n + 2$.

8. a) $a_n = a(n) = (-1)^n\, a \cdot b^n$

Se sabe que $\begin{cases} a_1 = -a \cdot b = -9 \\ a_2 = a \cdot b^2 = 27 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = 3$, $b = 3$.

$a_n = (-1)^n\, 3 \cdot 3^n = (-1)^n\, 3^{n+1}$

b) $a_n = a(n) = a \cdot b^n$

Se sabe que $\begin{cases} a_1 = a \cdot b = 5 \\ a_2 = a \cdot b^2 = 10 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = \dfrac{5}{2}$, $b = 2$.

$a_n = \dfrac{5}{2} \cdot 2^n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Son sucesiones geométricas, ya que el cociente entre dos términos consecutivos es constante.

9. $a_n = n^2 - 1$ y $b_n = n + 1$

a) $a_n + b_n = n^2 + n$

b) $b_n - a_n = -n^2 + n + 2$

c) $3a_n = 3n^2 - 3$

d) $\dfrac{a_n}{b_n} = n - 1$

10. a) $P(x) = ax^2 + bx + c$

Sabemos que:

$$\begin{cases} P(2) = 4a + 2b + c = 30 \\ P(5) = 16a + 4b + c = 50 \\ P(10) = 25a + 5b + c = 60 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $a = 0$, $b = 10$ y $c = 10$.

El polinomio de interpolación es lineal:
$P(x) = 10x + 10$.

b) $P(3) = 40$. Se esperaría que el automóvil hubiese rodado 40 000 km.

13 Funciones: límites y continuidad

1. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1)$ b) $\lim_{x \to 0} (x^4 + x - 3)$ c) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

2. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim_{x \to +\infty} (4 - x^2)$ b) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3)$ c) $\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 5)$

3. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

4. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$ b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$ b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Calcula los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en $x = 0$:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x}$ c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5x}{\text{tg } 2x}$ d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \cdot (1 - \cos x)}{\text{sen}^2 x}$

9. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

10. Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ si $x \neq 1$. ¿Cómo elegirías el valor de $f(1)$ para que la función fuera continua en ese punto?

11. Calcula el valor de a para el que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

SOLUCIONES

1. a) 4 b) -3 c) $+\infty$

2. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$

3. a) -1

b) Tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^3 - x^2 + 3)\cdot x}{(x-1)\cdot x} = -3$$

4. a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ no está definida en $x = 2$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$ no está definida en $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(x-1)} = 3$$

Como los límites laterales son iguales $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.

En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

5. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Dividiendo por x^2, $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} = 1$

b) Dividiendo por x, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2 + 4}{x + 1} = -\infty$

6. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = 2$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{4}$$

7. Los límites de este ejercicio presentan indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

a) $$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2 - 4} - x) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)\cdot(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4} + x)} = 0$$

b) $$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2 + x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)\cdot(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \frac{1}{2}$$

8. Estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{10x}{5x} = 2$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\text{tg } 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)}{\text{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\cos x)}{x^2} = 0$

9. a) $f(0) = -1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$

No es continua en $x = 0$.

b) $f(1) = 1$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

Es continua en $x = 1$ ya que $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

$f(3) = 5$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 7$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$

No es continua en $x = 3$.

c) $f(2) = 2$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

Es continua en $x = 2$ ya que $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 2$.

10. Debe ser $f(1) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x\to 1} x = 1$

11. Para que sea continua en $x = 3$ debe ser:

$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 13$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9 - a \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 = 9 - a$

Por tanto, $a = -4$.

14 Derivadas

1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 4$ en los intervalos $[0, 2]$ y $[-2, 0]$.

2. Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo $[a, a + h]$.

a) $f(x) = x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 2x$

3. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$ y $x = -1$

b) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 0$ y $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ en $x = -2$ y $x = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$ y $x = 4$

4. Halla la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto genérico $x = a$:

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

5. Calcula el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x + 2$ en $x = 2$ b) $f(x) = x^2 + x - 1$ en $x = 1$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ en $x = -1$

6. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición:

a) $D(3x)$ b) $D(x + 3)$ c) $D(x^2 + 3)$

7. Halla la función derivada de las siguientes funciones utilizando la definición:

a) $D\dfrac{x}{x+1}$ b) $D\sqrt{3x}$ c) $D\sqrt{x + 3}$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

9. Halla el punto de corte del eje OX con la recta tangente a $f(x) = x^2 - 2x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

10. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + 8$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

11. El espacio en metros recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - 1$, t en segundos.

a) Halla la velocidad media del móvil en el intervalo temporal $[1, 4]$.

b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 2$ segundos.

SOLUCIONES

1. $TVM_{[0,\ 2]} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - (-4)}{2} = 2$

$TVM_{[-2,\ 0]} = -2$

2. a) $TVM_{[a,\ a+h]} = \dfrac{(a + h) + 3 - (a + 3)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

b) $TVM_{[a,\ a+h]} = 2a + 2 + h$

3. a) $TVI(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(2 + h) + 2 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

$TVI(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(-1+h)+2-(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $TVI(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 1 - (-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

$TVI(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+ h)^2 - 1 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h + 6) = 6$

c) $TVI(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h - 2}{h - 1} - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(h - 1)} = 1$

$TVI(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h + 2}{h + 3} - \dfrac{2}{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{3(h + 3)} = \dfrac{1}{9}$

d) $TVI(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1 + h} + 1} = \dfrac{1}{2}$

$TVI(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} = \dfrac{1}{4}$

4. a) $TVI(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a + h)^2 - 3 - (a^2 - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (h + 2a) = 2a$

b) $TVI(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a + h - 1} - \sqrt{a - 1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{a + h - 1} + \sqrt{a - 1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a - 1}}$

5. a) $Df(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(2 + h) + 2 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $Df(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + h)^2 + (1 + h) - 1 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (3 + h) = 3$

c) $Df(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h + 2} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{h + 2} = -\dfrac{1}{2}$

6. a) $D(3x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x + h) - 3x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = 3$

b) $D(x + 3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h + 3) - (x + 3)}{h} = 1$

c) $D(x^2 + 3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 + 3 - (x^2 + 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

7. a) $D\dfrac{x}{x + 1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{x + h}{x + h + 1} - \dfrac{x}{x + 1}}{h} = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

b) $D\sqrt{3x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3(x + h)} - \sqrt{3x}}{h} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

c) $D(\sqrt{x + 3}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x + h + 3} - \sqrt{x + 3}}{h} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$

8. $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$f(1) = 2;\ f'(x) = 2x + 2;\ f'(1) = 4$

$y - 2 = 4 \cdot (x - 1)$

9. $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1);$

$f(-1) = 3;\ f'(x) = 2x - 2;\ f'(-1) = -4$

$y - 3 = -4 \cdot (x + 1)$

El punto es $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

10. La pendiente debe ser $m = 1$.

$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow 2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3$

El punto es $(3, 2)$.

La ecuación de la tangente es $x - y - 1 = 0$.

11. a) $v_m = \dfrac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \dfrac{47 - 2}{3} = 15$ m/s

b) $v_i = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{s(2 + h) - s(2)}{h} = \lim\limits_{x\to 0} (3h + 12) =$

$= 12$ m/s

15 Operaciones y cálculos con derivadas

1. Calcula las siguientes derivadas:

a) D 5 arctg x b) D 3 cos x c) D 2 arcsen x

2. Calcula las siguientes derivadas expresando previamente las funciones en forma de potencia:

a) $D\ \sqrt[4]{x^5}$ b) $D\ \dfrac{2x}{\sqrt{x}}$ c) $D\ \left(x^2\sqrt{x}\right)$

3. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\ \left(x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right)$ b) $D\ \left(-x^4 + x^2 - 1\right)$ c) $D\ \left(x^3 - 4x^2 + 1\right)^2$

4. Calcula las siguientes derivadas expresando previamente las funciones en forma de potencia:

a) $D\ \dfrac{1}{x+3}$ b) $D\ \dfrac{3}{x^2-1}$ c) $D\ \dfrac{2}{(x^2-3)^3}$

5. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\ e^{2x+7}$ b) $D\ 3\,e^{1-x^2}$ c) $D\ 3^{\text{tg}\,x}$

6. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\ L(x^3 - x^2)$ b) $D\ L(\cos x)$ c) $D\ L(x^2 + \text{sen}\,x)$

7. Calcula las siguientes derivadas:

a) $D\ \text{sen}\,(x + 5)$ b) $D\ \cos\,(x^2 - 1)$ c) $D\ \text{sen}\,(\text{sen}\,x)$

8. Calcula las siguientes derivadas y expresa el resultado de la forma más simple posible.

a) $D\ \text{arcsen}\,(x^2 - 1)$ b) $D\ \text{arctg}\,\dfrac{1+x}{1-x}$

9. Calcula la derivada de los siguientes productos:

a) $D\ \left((x^2 - 2)\cdot e^{x^2+1}\right)$ b) $D\ \left((1 + x^2)\cdot \text{arctg}\,x\right)$ c) $D\ \left(\cos x \cdot L(\text{tg}\,x)\right)$

10. Calcula la derivada de los siguientes cocientes:

a) $D\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $D\ \dfrac{x}{x^2 - 1}$ c) $D\ \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$

11. Calcula la derivada de las siguientes funciones de tipo potencial-exponencial.

a) $D\ \left(x^2 + 1\right)^x$ b) $D\ \left(\text{sen}\,x\right)^{x+1}$ c) $D\ \left(\text{tg}\,x\right)^{\cos x}$

12. Determina el valor de los parámetros m y n sabiendo que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + mx + n$ en el punto (1, 1).

13. Halla el valor de m para que la recta $y = 4x + m$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 5$.

SOLUCIONES

1. a) $D\ 5\ \text{arctg}\ x = \dfrac{5}{1 + x^2}$

b) $D\ 3\cos x = -3\ \text{sen}\ x$

c) $D\ 2\ \text{arcsen}\ x = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. a) $D\ \sqrt[4]{x^5} = D\ x^{\frac{5}{4}} = \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$

b) $D\ \dfrac{2x}{\sqrt{x}} = D\ 2x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $D\ \left(x^2\sqrt{x}\right) = D\ x^{\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$

3. a) $D\ (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 3x^2 - 6x + 4$

b) $D\ (-x^4 + x^2 - 1) = -4x^3 + 2x$

c) $D\ (x^3 - 4x^2 + 1)^2 = 2(x^3 - 4x^2 + 1)\ (3x^2 - 8x)$

4. a) $D\ \dfrac{1}{x + 3} = D\ (x + 3)^{-1} = \dfrac{-1}{(x + 3)^2}$

b) $D\ \dfrac{3}{x^2 - 1} = D\ 3(x^2 - 1)^{-1} = \dfrac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$

c) $D\ \dfrac{2}{(x^2 - 3)^3} = D\ 2(x^2 - 3)^{-3} = \dfrac{-12x}{(x^2 - 3)^4}$

5. a) $D\ e^{2x+7} = 2e^{2x+7}$

b) $D\ 3\ e^{1-x^2} = -6x\ e^{1-x^2}$

c) $D\ 3^{\text{tg}\,x} = L3 \cdot 3^{\text{tg}\,x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$

6. a) $D\ L(x^3 - x^2) = \dfrac{3x - 2}{x^2 - x}$

b) $D\ L(\cos x) = -\text{tg}\ x$

c) $D\ L(x^2 + \text{sen}\ x) = \dfrac{2x + \cos x}{x^2 + \text{sen}\ x}$

7. a) $D\ \text{sen}\ (x + 5) = \cos\ (x + 5)$

b) $D\ \cos\ (x^2 - 1) = -2x\ \text{sen}\ (x^2 - 1)$

c) $D\ \text{sen}\ (\text{sen}\ x) = \cos\ (\text{sen}\ x)\ \cos x$

8. a) $D\ \text{arcsen}\ (x^2 - 1) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} =$

$= \dfrac{2x}{\sqrt{x^2(2 - x^2)}}$

b) $D\ \text{arctg}\ \dfrac{1 + x}{1 - x} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9. a) $D\ \left((x^2 - 2) \cdot e^{x^2+1}\right) = 2x \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{x^2+1}$

b) $D\ ((1 + x^2) \cdot \text{arctg}\ x) = 2x\ \text{arctg}\ x + 1$

c) $D\ (\cos x \cdot L(\text{tg}\ x)) = -\text{sen}\ x \cdot L\ \text{tg}\ x + \dfrac{1}{\text{sen}\ x}$

10. a) $D\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{(x^2 + 1)^2}$

b) $D\ \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

c) $D\ \dfrac{e^x + x}{e^x - x} = \dfrac{2e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$

11. a) $D\ (x^2 + 1)^x = \left(L(x^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}\right)(x^2 + 1)^x$

b) $D\ (\text{sen}\ x)^{x+1} = (L\ \text{sen}\ x + (x + 1)\ \cot x)\ (\text{sen}\ x)^{x+1}$

c) $D\ (\text{tg}\ x)^{\cos x} = \left(-\text{sen}\ x\ L\ \text{tg}\ x + \dfrac{1}{\text{sen}\ x}\right)(\text{tg}\ x)^{\cos x}$

12. Como $f(1) = 1 \Rightarrow m + n = 1$.

Además $f'(x) = 2x + m$, entonces:

$f'(1) = 1 \Rightarrow 2 + m = 1$

Se resuelve el sistema $\begin{cases} m + n = 1 \\ 2 + m = 1 \end{cases}$ y resulta

$m = -1$ y $n = 2$.

La función es $f(x) = x^2 - x + 2$.

13. $f'(x) = 6x$

Se busca el punto de tangencia $(a, f(a))$ que verifica que $f'(a) = 4$.

$6a = 4 \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$

El punto de tangencia $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{19}{3}\right)$ pertenece a la recta tangente, por tanto:

$\dfrac{19}{3} = 4 \cdot \dfrac{2}{3} + m \Rightarrow m = \dfrac{11}{3}$

16 Monotonía y curvatura

1. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - 12x$ y calcula sus extremos relativos.

2. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$$

3. Estudia la curvatura de la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$ y determina sus puntos de inflexión.

4. Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión, si los tiene, de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y estudia su curvatura.

5. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ tiene un máximo en el punto $P(0, 1)$. Calcula los valores de a y b.

6. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x = 1$.

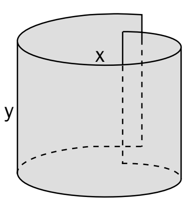
7. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una competición de atletismo de tres horas de duración viene dada por la función $f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 100t \cdot (3 - t)$, donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en que disminuye.

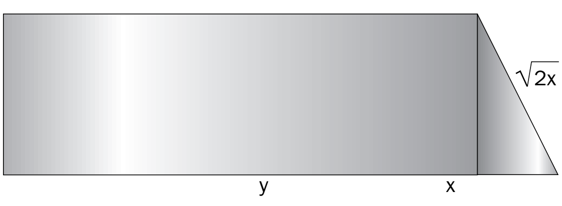
b) ¿En qué momento de la competición la capacidad de concentración de esta deportista es nula?

c) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la atleta pueda batir su propia marca?

8. Halla la base x y la altura y de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa a un lado vertical, genera un cilindro de volumen máximo.



9. Una figura de cuatro metros de perímetro está formada por un rectángulo al que se encuentra adosado un triángulo rectángulo isósceles, siendo el lado común uno de los catetos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de esta figura para que su área sea máxima?

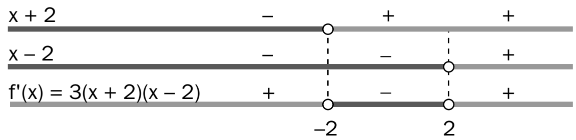


SOLUCIONES

1. Dominio: $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3\,(x + 2)\,(x - 2)$

Posibles puntos críticos $x = -2$ y $x = 2$.



La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y es decreciente en $(-2, 2)$.

$f''(x) = 6x;\ f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ (-2, f(-2)) = (-2, 16)$ es un máximo relativo

$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow (2, f(2)) = (2, -16)$ es un mínimo relativo.

2. Dominio: $\mathbb{R} - \{1\};\ f'(x) = \dfrac{x \cdot (x - 2)}{2(x - 1)^2}$

La derivada primera se anula en $x = 0$ y $x = 2$.

La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$ y es decreciente en $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

A partir de los intervalos de crecimiento:

$(0, f(0)) = (0, 0)$ es un máximo relativo y

$(2, f(2)) = (2, 2)$ es un mínimo relativo.

3. Dominio: $[3, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 3}} \qquad f''(x) = -\dfrac{1}{4(x - 3)\sqrt{x - 3}}$

Como la derivada segunda es negativa en todo el dominio, la función es cóncava en $[3, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

4. Dominio: $\mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\,(x - 1)\,(x - 3)$

La derivada primera se anula en $x = 1$ y $x = 3$.

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3)$.

$(1, 4)$ es un máximo relativo y $(3, 0)$ es un mínimo relativo.

$f''(x) = 6x - 12$ se anula en $x = 2$.

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 2)$ y es convexa en $(2, +\infty)$.

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

5. $f(0) = 1 \Rightarrow b = 1$. $f'(x)$ debe anularse en $x = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 4x + a;\ f'(0) = a \Rightarrow a = 0$

Para este valor $f''(0) = -4 < 0$,

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ tiene un máximo en $P(0, 1)$.

6. $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2x$ debe anularse en $x = 1$,

$0 = f'(1) = 6 + 3a \Rightarrow a = -2$

Para este valor $f''(1) > 0$, $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 1$.

7. a) $f'(t) = 300 - 200t$ y $f''(c) = -200$.

$f'(t)$ se anula en $t = 1{,}5$ y $f''(1{,}5) = -200 < 0$ por lo que se alcanza un máximo.

La capacidad de concentración aumenta durante la primera hora y media y disminuye a partir de la hora y media.

b) $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 3$.

La capacidad de concentración es nula al comienzo y al final de la competición.

c) $f''(1{,}5) = -200$

La capacidad de concentración es máxima a la hora y media del comienzo de la competición.

8. Perímetro: $60 = 2x + 2y \Rightarrow y = 30 - x$.

El radio de la base será $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

El volumen del cilindro es:

$V(x, y) = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y$

$V(x) = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot (30 - x) = \dfrac{30x^2 - x^3}{4\pi}$

Buscamos el máximo de $V(x)$:

$V'(x) = \dfrac{60x - 3x^2}{4\pi};\ V'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Como $V''(20) < 0$, se alcanza el volumen máximo para $x = 20$ cm, $y = 10$ cm.

9. Perímetro: $2x + 2y + \sqrt{2}x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2 - \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}x$

Área: $A(x, y) = xy + \dfrac{1}{2}x^2$

$A(x) = x\left(2 - \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}x\right) + \dfrac{1}{2}x^2 = 2x - \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}x^2$

$A'(x) = 2 - (1 + \sqrt{2})x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}}$

Como $A''\left(\dfrac{2}{1 + \sqrt{2}}\right) < 0$, el área es máxima para

$x = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}} \approx 0{,}83$ m, $y = -\sqrt{2} \approx 0{,}59$ m.

17 Estudio y representación de funciones

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

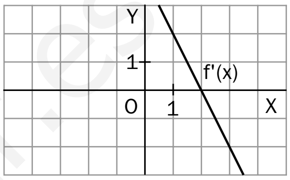
a) Calcula su dominio y dibuja su gráfica.

b) Define la función f en $x = 0$ para que sea continua en ese punto.

c) Estudia si, al dar a $f(0)$ el valor obtenido en el apartado anterior, la función es derivable en $x = 0$.

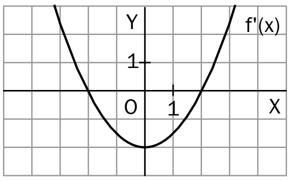
2. Una función $f(x)$ tiene por derivada $f'(x)$ cuya gráfica es la dada en la figura.

Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



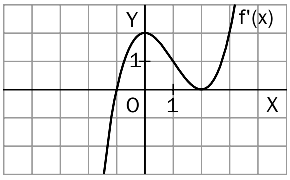
3. Una función $f(x)$ tiene por derivada $f'(x)$ cuya gráfica es la dada en la figura.

Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



4. Una función $f(x)$ tiene por derivada $f'(x)$ cuya gráfica es la dada en la figura.

Escribe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ e indica dónde tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión.



5. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 2}$ y comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

6. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ y comprueba si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función, calculando el punto de corte.

7. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = 6x - x^2$

8. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = (x + 1)^3$

9. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = -\dfrac{x}{x + 1}$

b) $f(x) = -\dfrac{x^2}{x + 1}$

SOLUCIONES

1. a) Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

c) $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

$f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = -1$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en $x = 0$.

2. Si $x < 2 \Rightarrow f'(x) > 0$: $f(x)$ es creciente.

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) < 0$: $f(x)$ es decreciente.

$f'(2) = 0$ y f' pasa de ser positiva a ser negativa $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un máximo en $x = 2$.

Como $f'(x)$ es decreciente, $f(x)$ es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.

3. Si $x < -2$ o $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$: $f(x)$ es creciente.

Si $-2 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0$: $f(x)$ es decreciente.

En $x = -2$, $f'(-2) = 0$ y f' pasa de ser positiva a ser negativa $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un máximo en $x = -2$.

En $x = 2$, $f'(2) = 0$ y f' pasa de ser negativa a ser positiva $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 2$.

En $x = 0$, $f'(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente $\Rightarrow$ $f(x)$ pasa de ser cóncava a ser convexa y, por tanto, hay un punto de inflexión.

4. Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$: $f(x)$ es decreciente.

Si $x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0$: $f(x)$ es creciente.

En $x = -1$, $f'(-1) = 0$ y f' pasa de ser negativa a ser positiva $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un mínimo en $x = -11$.

En $x = 0$ y en $x = 2$ cambia el crecimiento de $f'(x)$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ cambia la curvatura de $f(x)$ y, por tanto, hay puntos de inflexión.

5. El denominador se anula en $x = -2$.

Como $\lim_{x \to 2^-} \frac{1 - x}{x + 2} = -\infty$ y $\lim_{x \to -2^+} \frac{1 - x}{x + 2} = +\infty$,

$x = -2$ es asíntota vertical.

Como $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{x + 2} = -1$ y $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x}{x + 2} = -1$,

$y = -1$ es asíntota horizontal.

El sistema $\begin{cases} y = \frac{1 - x}{x + 2} \\ y = -1 \end{cases}$ no tiene solución.

No hay puntos de corte con la asíntota.

6. No tiene asíntotas verticales ya que el denominador no se anula.

Como $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 0$,

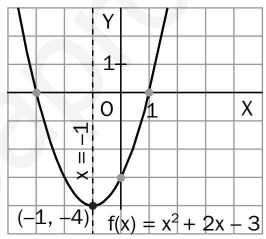
$y = 0$ es asíntota horizontal.

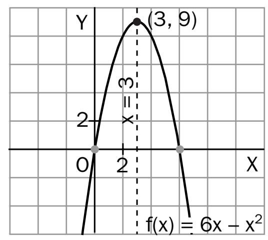
$\begin{cases} y = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases}$ tiene como solución $x = -1$

$(-1, 0)$ es el punto de corte con la asíntota.

7. a) $f'(x) = 2x + 2$ b) $f'(x) = 6 - 2x$

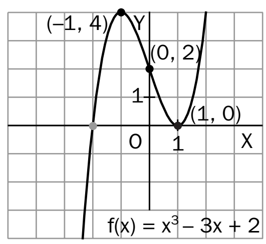
$f''(x) = 2$ $f''(x) = -2$

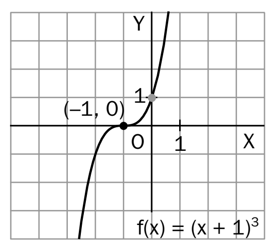




8. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ b) $f'(x) = 3(x + 1)^2$

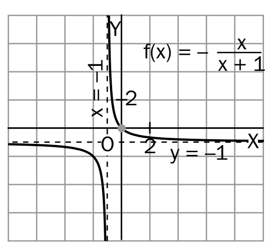
$f''(x) = 6x$ $f''(x) = 6(x + 1)$

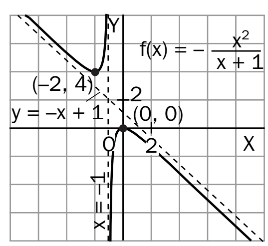




9. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2}$ b) $f'(x) = -\frac{x(x - 2)}{(x + 1)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3}$ $f''(x) = \frac{-2}{(x + 1)^3}$





18 Integrales indefinidas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (x + 2)\,dx$ b) $\int (3x^2 + 2x - 3)\,dx$ c) $\int \left(x + \frac{1}{2x^3}\right) dx$ d) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2} - 10\right) dx$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (10x + \sqrt{x})\,dx$ b) $\int \left(x^2 + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right) dx$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{6}{x + 1}\,dx$ b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right) dx$ c) $\int \frac{\cos x}{3 + \operatorname{sen} x}\,dx$ d) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}\,dx$

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5 \cdot e^{3x + 2}\,dx$ b) $\int 6 \cdot \sqrt{e^{5x}}\,dx$

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}\left(5x + \frac{1}{2}\right) dx$ b) $\int x^2 \cdot \cos(x^3 + 10)\,dx$

6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{4x}{\cos^2(x^2 + 2)}\,dx$ b) $\int \operatorname{cosec}^2\left(5x + \frac{3}{10}\right) dx$

7. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{16 + x^2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{x \cdot (1 + (Lx)^2)}\,dx$

8. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = 6x^2 - 6x + 5$ y que $F(2) = 8$.

9. De todas las funciones primitivas de $f(x) = 15x^2 - 2$, escribe la expresión algebraica de la que pasa por el punto $P(-2, -23)$.

10. Escribe la ecuación de la curva que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(-1, 8)$ y cuya derivada segunda es $f''(x) = -12x + 6$.

11. Escribe la expresión algebraica de la función $F(x)$ sabiendo que $f(x) = F'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ y que pasa por el punto $Q\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$.

12. La velocidad de un móvil en un cierto movimiento viene dada por $v(t) = 5t + 2$:

a) Escribe todas las posibles funciones que expresen el recorrido.

b) De todas las funciones anteriores, escoge aquella que verifica que cuando han transcurrido 2 segundos el móvil ha recorrido 28 metros.

c) Considerando el caso del apartado anterior, calcula el recorrido efectuado por el móvil cuando han transcurrido 10 segundos desde que se inició el movimiento.

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que sólo se escribe cuando se pide su valor.

1. a) $\int (x + 2)\, dx = \frac{x^2}{2} + 2x$

b) $\int (3x^2 + 2x - 3)\, dx = x^3 + x^2 - 3x$

c) $\int \left(x + \frac{1}{2x^3}\right) dx = \int \left(x + \frac{1}{2}x^{-3}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{-4} =$
$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x^2}$

d) $\int \left(2x + \frac{3}{x^2} - 10\right) dx = \int (2x + 3x^{-2} - 10)\, dx =$
$= x^2 + \frac{3x^{-1}}{-1} - 10x =$
$= x^2 - \frac{3}{x} - 10x$

2. a) $\int \left(10x + x^{\frac{1}{2}}\right) dx = 5x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = 5x^2 + \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$

b) $\int \left(x^2 + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{x^3}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{8}$

3. a) $\int \frac{6}{x+1}\, dx = 6 \cdot L\,|x + 1|$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right) dx =$
$= -\frac{1}{x} + L\,|x| + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

c) $\int \frac{\cos x}{3 + \operatorname{sen} x}\, dx = L\,|3 + \operatorname{sen} x|$

d) $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}\, dx = L\,|\operatorname{tg} x|$

4. a) $\int 5e^{3x+2}\, dx = \frac{5}{3}\int 3\, e^{3x+2}\, dx = \frac{5}{3}e^{3x+2}$

b) $\int 6\sqrt{e^{5x}}\, dx = 6\,\frac{2}{5}\int \frac{5}{2}e^{\frac{5}{2}x}\, dx = \frac{12}{5}e^{\frac{5x}{2}}$

5. a) $\frac{1}{5}\int 5 \operatorname{sen}\left(5x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{5}\cos\left(5x + \frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{1}{3}\int 3x^2 \cos(x^3 + 10)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3 + 10)$

6. a) $2\int \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 2)}\, dx = 2\operatorname{tg}(x^2 + 2)$

b) $\frac{1}{5}\int 5 \operatorname{cosec}^2\left(5x + \frac{3}{10}\right) dx =$
$= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{3}{10}\right)$

7. a) $\frac{4}{16}\int \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}$

b) $\operatorname{arctg}(Lx)$

8. $F(x) = \int (6x^2 - 6x + 5)\, dx = 2x^3 - 3x^2 + 5x + C$

$F(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + C = 14 + C = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -6 \Rightarrow F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$

9. $F(x) = \int (15x^2 - 2)\, dx = 5x^3 - 2x + C$

$F(-2) = 5(-2)^3 - 2(-2) + C = -36 + C = -23 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 13 \Rightarrow F(x) = 5x^3 - 2x + 13$

10. $f'(x) = \int (-12x + 6)\, dx = -6x^2 + 6x + C$

$f(x) = \int (-6x^2 + 6x + C)\, dx = -2x^3 + 3x^2 + Cx + K$

$\begin{cases} f(1) = 1 + C + K = 0 \\ f(-1) = 5 - C + K = 8 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -2,\ K = 1 \Rightarrow f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

11. $F(x) = \int (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + C = 1 + C = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = -3 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x - 3$

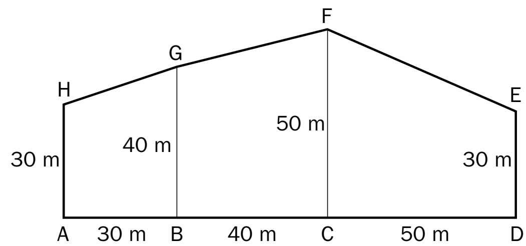
12. a) $e(t) = \int (5t + 2)\, dt = \frac{5}{2}t^2 + 2t + C$

b) $e(2) = 10 + 4 + C = 28 \Rightarrow C = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow e = \frac{5}{2}t^2 + 2t + 14$

c) $e(10) = 250 + 20 + 14 = 284$ m

19 Área bajo una curva. Integral definida

1. Una empresa constructora quiere comprar un terreno para lo cual realiza algunas mediciones y dibuja el plano de la figura. Calcula el valor que deberá pagar sabiendo que el metro cuadrado tiene un precio de 180 euros.



2. Se quiere calcular el área encerrada bajo la curva $y = x^2 + 2$ en el intervalo [2, 3].

a) Halla las abscisas de los puntos que dividen al intervalo [2, 3] en cuatro partes iguales.

b) Halla las imágenes en los puntos en que has dividido el intervalo.

c) Utiliza el método de los trapecios para aproximar el área.

3. Utiliza el método de los trapecios para aproximar el área limitada por la función $y = 2x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, 4]$ dividiendo este en cinco partes iguales.

4. Con ayuda del método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función $y = \dfrac{2}{x - 1}$ en el intervalo [2, 4] cuando este se ha dividido en cuatro partes iguales.

5. Considera la función $f(x) = 2x^2 - 1$:

a) Aplicando el método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función en el intervalo [1, 3] cuando este se ha dividido en cinco partes iguales.

b) Escribe una primitiva cualquiera de la función.

c) Aplicando el teorema de Barrow, calcula el área encerrada por la función en el intervalo [1, 3].

d) Compara los resultados obtenidos en a y en c.

6. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$:

a) Aplicando el método de los trapecios, calcula una aproximación del área encerrada por la función en el intervalo $[-1, 2]$ cuando este se ha dividido en seis partes iguales.

b) Escribe una primitiva cualquiera de la función.

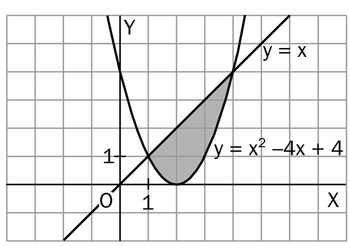
c) Aplicando el teorema de Barrow, calcula el área encerrada por la función en el intervalo $[-1, 2]$.

d) Compara los resultados obtenidos en a y en c.

7. Dada la función $y = (x - 1)^2$; dibuja la zona del plano limitada por la función y por las rectas $x = 1$ y $x = 2$ y aplicando el método de Barrow, calcula el área de la zona dibujada.

8. Calcula el área limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$.

9. Expresa el área sombreada en la figura mediante una integral definida. Calcúlala aplicando el método de Barrow.



SOLUCIONES

1. El área del terreno es la suma de las áreas de los tres trapecios en que se puede dividir.

$A = A_t(ABGH) + A_t(BCFG) + A_t(CDEF) =$

$= \dfrac{(30+40)\cdot 30}{2} + \dfrac{(40+50)\cdot 40}{2} + \dfrac{(50+30)\cdot 50}{2} =$

$= 4\,850 \text{ m}^2$

Coste total $C = 4\,850 \cdot 180 = 873\,000$ euros.

2. a) Longitud de la partición: $h = \dfrac{3-2}{4} = 0{,}25$

Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}25$; $x = 2{,}5$; $x = 2{,}75$; $x = 3$.

b) $f(2) = 6$; $f(2{,}25) = 7{,}0625$; $f(2{,}5) = 8{,}25$; $f(2{,}75) = 9{,}5625$; $f(3) = 11$.

c) $A = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{f(2)}{2} + f(2{,}25) + f(2{,}5) + f(2{,}75) + \dfrac{f(3)}{2}\right] =$

$= \dfrac{1}{4}\,[3 + 7{,}0625 + 8{,}25 + 9{,}5625 + 5{,}5] =$

$= \dfrac{33{,}375}{4} = 8{,}34375$

3. Longitud de la partición: $h = \dfrac{4-(-2)}{5} = 1{,}2$

Abscisas: $x = -2$; $x = -0{,}8$; $x = 0{,}4$; $x = 1{,}6$; $x = 2{,}8$; $x = 4$.

$f(-2) = 9$; $f(-0{,}8) = 2{,}28$; $f(0{,}4) = 1{,}32$;

$f(1{,}6) = 6{,}12$; $f(2{,}8) = 16{,}68$; $f(4) = 33$.

$A = 1{,}2\,[4{,}5 + 2{,}28 + 1{,}32 + 6{,}12 + 16{,}68 + 16{,}5] = 56{,}88$

4. Longitud de la partición: $h = 0{,}5$.

Abscisas: $x = 2$; $x = 2{,}5$; $x = 3$; $x = 3{,}5$; $x = 4$.

$A = 0{,}5 \cdot \left[1 + \dfrac{2}{1{,}5} + 1 + 0{,}8 + \dfrac{1}{3}\right] = 2{,}2\widehat{3}$

5. a) Longitud de la partición: $h = 0{,}4$

Abscisas: $x = 1$; $x = 1{,}4$; $x = 1{,}8$; $x = 2{,}2$; $x = 2{,}6$; $x = 3$.

$A = 0{,}4\,[0{,}5 + 2{,}92 + 5{,}48 + 8{,}68 + 12{,}52 + 8{,}5] = 15{,}44$

b) $F(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 1)\,dx = \dfrac{2}{3}x^3 - x$

c) $A = \displaystyle\int_1^3 (2x^2 - 1)\,dx = \left[\dfrac{2}{3}x^3 - x\right]_1^3 =$

$= (18 - 3) - \left(\dfrac{2}{3} - 1\right) = \dfrac{46}{3} = 15{,}\widehat{3}$

d) $15{,}44 - \dfrac{46}{3} = 0{,}1$ es el error cometido.

6. a) Longitud de la partición: $h = 0{,}5$

Abscisas: $x = -1$; $x = -0{,}5$; $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$; $x = 1{,}5$; $x = 2$.

$A = 0{,}5\left[0{,}5 + \dfrac{2}{3} + 0{,}5 + 0{,}4 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{7} + 0{,}125\right] = 1{,}40535...$

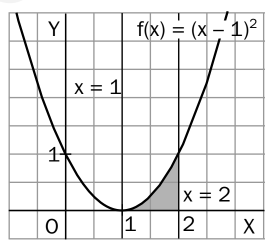
b) $F(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x+2}\,dx = L\,|x + 2|$

c) $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) dx = \Big[L\,|x + 2|\Big]_{-1}^{2} =$

$= L4 - L1 = 1{,}38629...$

d) $1{,}40535... - 1{,}38629... = 0{,}019$ es el error cometido.

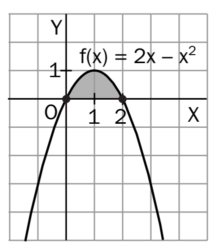
7.



$A = \displaystyle\int_1^2 (x - 1)^2\,dx =$

$= \left[\dfrac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 = \dfrac{1}{3}\,u^2$

8.



$A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\,dx =$

$= \left[x^2 - \dfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{3}\,u^2$

9. Puntos de corte de las dos funciones: (1, 1) y (4, 4)

$A = \displaystyle\int_1^4 [x - (x^2 - 4x + 4)]\,dx =$

$= \displaystyle\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^4 =$

$= 4{,}5\ u^2$

20 Distribuciones unidimensionales y bidimensionales

1. En la siguiente tabla se muestra el número de trasplantes de corazón realizados en los hospitales de un país europeo durante ocho años diferentes de la década de los noventa del siglo XX:

N.° trasplantes	232	254	287	292	340	375	395	430

a) Calcula la media aritmética y la desviación típica.

b) ¿Crees que hay mucha diferencia en el número de trasplantes realizados según el año de que se trate o, por el contrario, los datos están agrupados?

2. En cada una de las siguientes series estadísticas bidimensionales:

— Dibuja el diagrama de dispersión y analiza el tipo de relación que existe entre las dos variables observando el diagrama.

— Calcula las medias y utilízalas para determinar de manera aproximada la recta de regresión de y sobre x.

— Calcula el coeficiente de correlación.

a)

x	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
y	1	2	2	3	4	3	4	5	4	5	5	6	6	8	7	8

b)

x	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
y	4	2	3	4	1	2	2	3	1	2	1	2	0	1	0

3. Para estudiar la relación entre los gastos en publicidad de seis empresas de productos lácteos y las ventas realizadas durante un determinado período de tiempo disponemos de los siguientes datos:

Gastos en publicidad (miles de euros)	1	2	3	4	5	6
Ventas (miles de euros)	12	14	14	15	18	16

a) Calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables x = Gastos en publicidad e y = Ventas.

b) Calcula la covarianza y el valor del coeficiente de correlación lineal.

c) Halla la ecuación de la recta de regresión de y sobre x.

d) ¿Qué Ventas debemos esperar para un Gasto en publicidad de 8 000 euros? ¿Cómo de fiable es esta estimación?

4. Dada la siguiente serie estadística bidimensional:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	3	4	4	6	4	7	5	9	8

a) Dibuja el diagrama de dispersión y calcula el coeficiente de correlación lineal.

b) Explica de qué tipo es la relación entre las variables.

c) Halla las rectas de regresión de Y sobre X.

5. Los valores de dos variables X e Y se distribuyen según la siguiente tabla:

X	1	2	4	5	6	0	8	8	8	7	9
Y	2	5	2	3	3	5	3	3	10	4	8

a) Calcula el coeficiente de correlación.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

c) ¿Sería fiable el valor que obtendrías para X = 10?

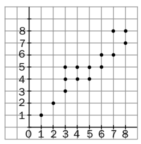
SOLUCIONES

1. a) $\overline{x} = \dfrac{2\,605}{8} \approx 325$

$$s = \sqrt{\dfrac{883\,123}{8} - 325^2} \approx 66$$

b) La desviación típica es grande en relación con la media aritmética. El número de trasplantes no puede considerarse que sea estable, pues los datos no están muy agrupados.

2. a)



Relación lineal positiva fuerte.

$\overline{x} = \dfrac{50}{15} = 3,33$

$\overline{y} = \dfrac{28}{15} = 1,87$

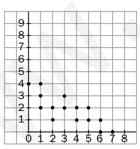
$S_{xy} = 3,89;\ S_x = 2,05;\ S_y = 2,03$

$y - 4,56 = \dfrac{3,89}{2,05^2}(x - 4,75) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0,93x + 0,16$

$r = \dfrac{3,89}{2,05 \cdot 2,03} = 0,94$

b)



Relación lineal negativa fuerte.

$\overline{x} = \dfrac{76}{16} = 4,75$

$\overline{y} = \dfrac{73}{16} = 4,56$

$S_{xy} = -2,02;\ S_x = 2,09;\ S_y = 1,20$

$y - 1,87 = \dfrac{-2,02}{2,09^2}(x - 3,33) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -0,46x + 3,41$

$r = \dfrac{-2,02}{2,09 \cdot 1,20} = -0,80$

3. a) $\overline{x} = \dfrac{21}{6} = 3,5;\ \overline{y} = \dfrac{89}{6} = 14,83$

$S_x = 1,71;\qquad S_y = 1,86$

b) $S_{xy} = 2,75;\qquad r = \dfrac{2,75}{1,71 \cdot 1,86} = 0,86$

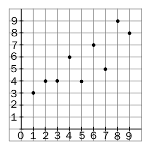
c) $y - 14,83 = \dfrac{2,75}{1,71^2}(x - 3,5) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0,94x + 11,54$

d) Para un gasto en publicidad de 8 000 € las ventas serían de 19 000 € aproximadamente.

Esta estimación es bastante fiable ya que el coeficiente de correlación es próximo a 1.

4. a)



$\overline{x} = \dfrac{45}{9} = 5;\ \overline{y} = \dfrac{50}{9} = 5,56$

$S_x = 2,58;\ S_y = 1,95$

$S_{xy} = 4,22\ \ r = \dfrac{4,22}{2,58 \cdot 1,95} = 0,838$

b) La relación entre las variables es positiva y fuerte.

c) $y - 5,56 = \dfrac{4,22}{2,58^2}(x - 5) \Rightarrow y = 0,63x + 2,39$

5. a) $\overline{x} = \dfrac{58}{11} = 5,273;\ \overline{y} = \dfrac{48}{11} = 4,364$

$S_x = 2,988$

$S_y = 2,422;\ S_{xy} = 2,537$

$r = \dfrac{2,537}{2,988 \cdot 2,422} = 0,351$

b) $y - 4,364 = \dfrac{2,537}{2,988^2}(x - 5,273) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 0,284x + 2,865$

c) La correlación es demasiado débil para que se pueda usar la recta de regresión para hacer estimaciones fiables.

21 Combinatoria

1. Calcula el valor de:

a) $C_{8,2}$ b) $V_{6,3}$ c) $VR_{7,2}$ d) $PR_{10}^{2,2,6}$

2. ¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5? Representa el diagrama en árbol para formar todos los resultados posibles.

3. ¿Cuántos números de dos cifras, iguales o distintas, se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5? Representa el diagrama en árbol para formar todos los resultados posibles.

4. ¿Cuántos productos de dos factores distintos se pueden formar con las cifras 2, 3 y 5? Representa el diagrama en árbol para formar todos los resultados posibles.

5. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{4! + 5!}{3! \cdot 4!}$ b) $\dfrac{m!}{(m - 2)!}$ c) $\dfrac{6! \cdot 8!}{7! \cdot 9!}$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $V_{x,5} = 6 \cdot V_{x,3}$ b) $2 \cdot C_{x,4} = 5 \cdot C_{x,2}$

7. Utilizando las propiedades de los números combinatorios, calcula en cada caso el valor de x.

a) $\binom{10}{4} = \binom{10}{x}$ b) $\binom{x}{5} + \binom{x}{6} = \binom{7}{6}$ c) $\binom{8}{x} = \binom{8}{2x - 2}$

8. Dados diez puntos en un plano de modo que tres cualesquiera de ellos no estén situados en línea recta, ¿cuántos cuadriláteros diferentes podrán formarse?

9. ¿De cuántas maneras pueden viajar cinco personas en un coche si solo dos de ellas saben conducir?

10. Lanzamos una moneda al aire doce veces. Supongamos que siete veces sale «cara» y las cinco restantes sale «cruz». ¿De cuántas maneras distintas podemos obtener este resultado?

11. En una caja hay una bola blanca, dos rojas, tres verdes y nueve negras. Si extraemos todas las bolas de una en una, ¿cuántas ordenaciones de colores podemos obtener?

12. Con los números 2, 3, 5, 7, 11 y 13:

a) ¿Cuántos productos distintos de cuatro factores podemos obtener?

b) ¿Cuántos de ellos acaban en 0?

13. En ciertos términos del desarrollo de $(a + b)^9$ figuran las siguientes potencias de a: a^6, a^2, a.

a) ¿Con qué exponente figura b en esos mismos términos?

b) ¿Qué coeficiente aparece en cada uno de ellos?

14. Calcula las siguientes potencias:

a) $(3 + x)^5$ b) $(1 - x)^6$

SOLUCIONES

1. a) $C_{8,2} = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

c) $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

d) $PR_{10}^{2,2,6} = \dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 6!} = 1\,260$

2.

- 2 → 3 – 23, 5 – 25
- 3 → 2 – 32, 5 – 35
- 5 → 2 – 52, 3 – 53

No intervienen todos los números, influye el orden y no hay repeticiones.

$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$ números distintos.

3.

- 2 → 2 – 22, 3 – 23, 5 – 25
- 3 → 2 – 32, 3 – 33, 5 – 35
- 5 → 2 – 52, 3 – 53, 5 – 55

No intervienen todos los números, influye el orden y puede haber repeticiones.

$VR_{3,2} = 3^2 = 9$ números distintos.

4.

- 2 → 3 – 2 · 3 = 6, 5 – 2 · 5 = 10
- 3 → 2 – 3 · 2 = 6, 5 – 3 · 5 = 15
- 5 → 2 – 5 · 2 = 10, 3 – 5 · 3 = 15

No intervienen todos los números y no influye el orden:

$C_{3,2} = \dfrac{V_{3,2}}{P_2} = \dfrac{3 \cdot 2}{3} = 3$ productos distintos.

5. a) $\dfrac{4! + 5!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{4! + 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{1 + 5}{3!} = 1$

b) $\dfrac{m!}{(m - 2)!} = \dfrac{m\,(m - 1)\,(m - 2)!}{(m - 2)!} = m^2 - m$

c) $\dfrac{6! \cdot 8!}{7! \cdot 9!} = \dfrac{6! \cdot 8!}{7 \cdot 6! \cdot 9 \cdot 8!} = \dfrac{1}{63}$

6. a) $x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)\,(x - 4) =$
$= 6\,x\,(x - 1)\,(x - 2)$

Como $x > 5 \Rightarrow (x - 3)\,(x - 4) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6$
(La solución $x = 1$ no es válida.)

b) $2\,\dfrac{x!}{(x - 4)! \cdot 4!} = 5\,\dfrac{x!}{(x - 2)! \cdot 2!}$

Simplificando $\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{(x - 2) \cdot (x - 3)} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$
(La solución $x = -3$ no es válida.)

7. a) $\dbinom{10}{4} = \dbinom{10}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 10 - x = 4 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

b) $\dbinom{x}{5} + \dbinom{x}{6} = \dbinom{7}{6} \Rightarrow x + 1 = 7 \Rightarrow x = 6$

c) $\dbinom{8}{x} = \dbinom{8}{2x - 2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ 8 - (2x - 2) = x \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

8. Cuatro puntos determinan un cuadrilátero.

El número total es: $C_{10,4} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$

9. Podemos elegir al conductor de dos maneras y para cada una de ellas las restantes personas se pueden colocar de P_4 formas:
$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ maneras posibles.

10. Son 12 elementos de los cuales hay 7 y 5 repetidos: $P_{12}^{7,5} = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$ maneras distintas.

11. Tenemos 15 elementos entre los cuales hay 2, 3 y 9 repetidos.

$P_{15}^{1,2,3,9} = \dfrac{15!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 9!} = 300\,300$ ordenaciones.

12. a) No influye el orden: $C_{6,4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ productos.

b) Los que contengan al 2 y al 5:

$C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

13. Término general del desarrollo: $\dbinom{9}{n} \cdot a^{9-n} \cdot b^n$

a) a^6: $9 - n = 6 \longrightarrow n = 3 \Rightarrow b^3$
a^2: $9 - n = 2 \longrightarrow n = 7 \Rightarrow b^7$
a^1: $9 - n = 1 \longrightarrow n = 8 \Rightarrow b^8$

b) a^6: $n = 3 \Rightarrow \dbinom{9}{3} = 84$

a^2: $n = 7 \Rightarrow \dbinom{9}{7} = 36$; a: $n = 8 \Rightarrow \dbinom{9}{8} = 9$

14. a) $(3 + x)^5 = 243 + 405x + 270x^2 + 90x^3 +$
$+ 15x^4 + x^5$

b) $(1 - x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 +$
$+ 15x^4 - 6x^5 + x^6$

22 Cálculo de probabilidades

1. En una bolsa hay cuatro bolas blancas y tres negras. Calcula la probabilidad de que al sacar simultáneamente tres bolas:

a) Sean las tres blancas. b) No haya ninguna bola blanca. c) Haya una única bola blanca.

2. A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio de los que se conoce $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ y $p(A \cap B) = \frac{2}{9}$.

Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $A \cup B$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ f) $\overline{A} \cup B$

3. Se lanzan tres dados. Halla las probabilidades de los siguientes resultados:

a) La suma de los puntos obtenidos es 5.

b) La suma de los puntos obtenidos es múltiplo de 5.

c) La suma de los puntos obtenidos es menor que 5.

4. A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio. Sabiendo que $p(A) = 0{,}3$, $p(\overline{B}) = 0{,}6$ y $p(A/B) = 0{,}32$, calcula:

a) $p(A \cap B)$ b) $p(A \cup B)$ c) $p(A/\overline{B})$ d) $p(B/A)$

5. En un centro de investigación genética el 55 % de los investigadores son médicos, el 55 % biólogos y el 20 % tiene ambas especialidades. Si se selecciona un investigador al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Ser médico o biólogo.

b) Ser médico pero no biólogo.

c) Tenga una especialidad distinta a las anteriores.

6. De una bolsa que contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras se extraen tres bolas. Halla la probabilidad de que sean dos bolas blancas y una negra si:

a) Se extraen las tres bolas a la vez.

b) Se extrae una bola, se anota su color y se devuelve a la bolsa antes de la siguiente extracción.

7. Una urna A contiene una bola azul y tres rojas. Otra urna B tiene cinco bolas azules y tres rojas. Se extrae al azar una bola de A y se introduce en B. Finalmente se saca una bola de la urna B.

a) Indica los cuatro casos posibles y calcula la probabilidad de cada caso.

b) Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A fuera azul si hemos sacado de B una bola roja.

8. En una fábrica de bombillas hay tres máquinas A, B y C que producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de la producción. Los porcentajes de productos defectuosos por cada una de esas máquinas son, respectivamente, el 3 %, el 4 % y el 5 %. Se elige una bombilla al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bombilla sea defectuosa?

9. Sobre la mesa tengo tres cajas con botones; la primera tiene 5 botones, la segunda 7 y la tercera 8, pero en cada una de ellas hay un único botón negro. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón negro?

b) Si he sacado un botón negro, ¿cuál es la probabilidad de que sea el de la primera caja?

SOLUCIONES

1. a) $p(\text{sean las tres blancas}) = \dfrac{C_{4,\,3}}{C_{7,\,3}} = \dfrac{4}{35}$

b) $p(\text{no haya ninguna bola blanca}) =$

$= p(\text{las tres son negras}) = \dfrac{1}{C_{7,\,3}} = \dfrac{1}{35}$

c) $p(\text{haya una única bola blanca}) = \dfrac{4 \cdot C_{3,\,2}}{C_{7,\,3}} = \dfrac{12}{35}$

2. a) $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

b) $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$= \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9}$

d) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A \cup B) = \dfrac{4}{9}$

e) $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{9}$

f) $p(\overline{A} \cup B) = p(\overline{A}) + p(A \cap B) = \dfrac{5}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$

3. a) S_5 = «suma 5», se puede obtener mediante $\{1, 1, 3\}$ o $\{2, 2, 1\}$ de tres maneras $p(S_5) = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

b) Suma múltiplo de 5 se puede obtener como:

S_5 = «suma 5», de 6 maneras distintas.

S_{10} = «suma 10», de 27 maneras distintas:
$\{6, 2, 2\}$, $\{4, 4, 2\}$, $\{4, 3, 3\}$ de tres maneras distintas cada uno, y
$\{6, 3, 1\}$, $\{5, 4, 1\}$, $\{5, 3, 2\}$ de seis maneras distintas cada uno.

S_{15} = «suma 15», se puede obtener de 10 formas distintas:
$\{6, 6, 3\}$ de tres maneras, $\{6, 5, 4\}$ de 6 maneras o $\{5, 5, 5\}$.

$p(\text{suma múltiplo de 5}) = \dfrac{6 + 27 + 10}{6^3} = \dfrac{43}{216}$

c) $p(\text{suma menor que 5}) = p(S_3) + p(S_4) = \dfrac{4}{216} = \dfrac{1}{54}$

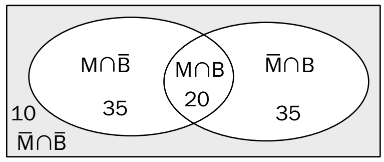
4. a) $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = 0{,}4 \cdot 0{,}32 = 0{,}128$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}572$

c) $p(A/\overline{B}) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{p(A) - p(A \cap B)}{p(\overline{B})} = 0{,}287$

d) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0{,}128}{0{,}3} = 0{,}427$

5. M = «ser médico», B = «ser biólogo».



a) $p(M \cup B) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$

b) $p(M \cap \overline{B}) = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

c) $p(\overline{M} \cap \overline{B}) = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$

6. a) $p = \dfrac{C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,1}}{C_{10,\,3}} = \dfrac{1}{2}$ o $p = 3 \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

b) $p = 3 \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{54}{125}$

7. a) A_A: azul de la urna A, A_B: azul de la urna B.

$p(A_A \cap A_B) = p(A_A) \cdot p(A_B/A_A) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{6}$

Con los mismos criterios:

$p(A_A \cap R_B) = p(A_A) \cdot p(R_B/A_A) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{12}$

$p(R_A \cap A_B) = \dfrac{5}{12} \quad p(R_A \cap R_B) = \dfrac{1}{3}$

b) $p(A_A/R_B) = \dfrac{p(R_B/A_A) \cdot p(A_A)}{p(R_B/A_A) \cdot p(A_A) + p(R_B/R_A) \cdot p(R_A)} = \dfrac{1}{5}$

8. D = «bombilla defectuosa».

$p(A) = \dfrac{50}{100}$, $p(B) = \dfrac{30}{100}$, $p(C) = \dfrac{20}{100}$,

$p(D/A) = \dfrac{3}{100}$, $p(D/B) = \dfrac{4}{100}$, $p(D/C) = \dfrac{5}{100}$

Por el teorema de la probabilidad total:

$p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + p(D/C) \cdot p(C) =$

$= \dfrac{3}{100} \cdot \dfrac{50}{100} + \dfrac{4}{100} \cdot \dfrac{30}{100} + \dfrac{5}{100} \cdot \dfrac{20}{100} = \dfrac{37}{1\,000}$

9. C_i = «elegir la caja i».

N = «sacar un botón negro».

a) $p(\text{sacar un botón negro}) = p(N) =$

$= p(N/C_1) \cdot p(C_1) + p(N/C_2) \cdot p(C_2) + p(N/C_3) \cdot p(C_3) =$

$= \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{131}{840} = 0{,}15595$

b) $p(C_1/N) = \dfrac{p(N/C_1) \cdot p(C_1)}{p(N)} = \dfrac{56}{131} = 0{,}42748$

23 Distribuciones discretas. Distribución binomial

1. Sea X una variable aleatoria que toma valores en {2,3,4,5,6} con las siguientes probabilidades:

$p(2) = \frac{1}{15}$ $p(3) = \frac{2}{15}$ $p(4) = \frac{1}{5}$ $p(5) = \frac{4}{15}$ $p(6) = \frac{1}{3}$

a) Comprueba que p(X) es una función de probabilidad y represéntala gráficamente.

b) Calcula la media y la distribución típica de esta distribución.

c) Calcula la probabilidad de $p(X \geqslant 3)$, $p(X \leqslant 4)$ y $p(3 < X < 6)$.

2. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	a	0,2	b	0,4	c

Sabiendo que $p(X \leqslant 3) = 0,4$ y $p(X \geqslant 3) = 0,7$, se pide:

a) Completa la distribución de probabilidad.

b) Halla la esperanza matemática y la desviación típica de la distribución.

3. De una bolsa que contiene dos bolas rojas, tres negras y una blanca se extrae una bola, se observa su color y se devuelve a la bolsa. Se considera la variable aleatoria X = «número de bolas negras que han salido en un total de diez extracciones».

a) Calcula la probabilidad de haber extraído exactamente tres bolas negras.

b) Calcula la probabilidad de haber extraído menos de tres bolas negras.

c) ¿Cuál es el número medio de bolas negras que esperaríamos extraer al realizar diez extracciones?

4. En un juego de dados el jugador se anota un punto cada vez que, al lanzar dos dados, obtiene un seis doble. Cada partida se juega a cinco lanzamientos.

a) Calcula la probabilidad de no obtener ningún punto en una partida.

b) Calcula la probabilidad de obtener al menos dos puntos en una partida.

5. Una compañía aseguradora comienza una campaña telefónica destinada a aumentar el número de pólizas de seguros del hogar. Por su experiencia previa en este tipo de campañas se sabe que una de cada 20 personas que reciben la llamada suscribe una nueva póliza. Si en un día llaman a 25 personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no consigan ninguna nueva póliza?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que consigan como máximo dos pólizas nuevas?

6. Según una encuesta, el 40 % de la población convive con algún animal doméstico y el resto no tiene ninguna mascota. Elegidas diez personas al azar, se desea saber:

a) La probabilidad de que las diez tengan alguna mascota.

b) La probabilidad de que ninguna de las diez tenga una mascota.

c) La probabilidad de que exactamente la mitad de ellos tenga una mascota.

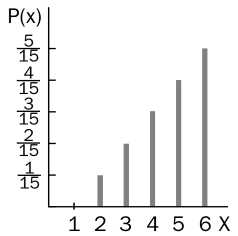
7. El 15 % de los envases de leche que se venden en un determinado supermercado no tiene etiqueta con el precio por unidad. Si elegimos al azar 6 envases:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga la etiqueta del precio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad estén etiquetados?

SOLUCIONES

1. a)



$p_i \geqslant 0,\ i = 2...6$

$y \sum_{i=2}^{6} p_i = 1$

b)

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{18}{15}$
4	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{15}$
5	$\frac{4}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{100}{15}$
6	$\frac{1}{3}$	2	12
		$\frac{70}{15}$	$\frac{350}{15}$

$\mu = \frac{70}{15} = 4{,}6667$

$\sigma^2 = \frac{350}{15} - \left(\frac{70}{15}\right)^2 = 1{,}\widehat{5}$

$\sigma = \sqrt{1{,}\widehat{5}} = 1{,}2472$

c) $p(X \geqslant 3) = 1 - p(2) = \frac{14}{15}$

$p(X \leqslant 4) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{2}{5}$

$p(3 < X < 6) = p(4) + p(5) = \frac{7}{15}$

2. a) $p(X \leqslant 3) = p_1 + p_2 + p_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}4 = a + 0{,}2 + b \Rightarrow a + b = 0{,}2$

$p(X \geqslant 3) = p_3 + p_4 + p_5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}7 = b + 0{,}4 + c \Rightarrow b + c = 0{,}3$

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + 0{,}2 + b + 0{,}4 + c = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b + c = 0{,}4$

Resolviendo el sistema: $a = 0{,}1$; $b = 0{,}1$; $c = 0{,}2$.

b)

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,4	0,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,4	1,6	6,4
5	0,2	1	5
		3,4	13,2

$\mu = 3{,}4$

$\sigma^2 = 13{,}2 - (3{,}4)^2 = 1{,}64$

$\sigma = \sqrt{1{,}64} = 1{,}2806$

3. a) En cada lanzamiento son posibles dos resultados A = «obtener bola negra» o $\overline{A}$; el resultado de cada lanzamiento es independiente de los anteriores; la probabilidad de éxito $p(A) = \frac{1}{2}$ es constante.

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 10$ y $p = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

$p(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,\ 1667$

b) $p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) =$
$= 0,\ 0547$

c) $\mu = n \cdot p = 5$ bolas negras.

4. a) X = «total de puntos». En cada lanzamiento son posibles dos resultados A = «obtener seis doble, es decir, un punto» o $\overline{A}$; el resultado de cada lanzamiento es independiente de los anteriores; la probabilidad de éxito $p(A) = \frac{1}{36}$ es constante.

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $p = \frac{1}{36} \Rightarrow B\left(5; \frac{1}{36}\right)$.

$p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^5 = 0,\ 86861$

b) $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X < 2) = 0{,}0073$

5. X = «número de pólizas nuevas» sigue una distribución binomial $B(25; 0{,}05)$.

a) $p(X = 0) = 0{,}2774$

b) $p(X \leqslant 2) = 0{,}8729$

6. X = «número de personas que tienen una mascota» sigue una distribución binomial $B(10; 0{,}4)$.

a) $p(X = 10) = 0{,}0001$

b) $p(X = 0) = 0{,}006$

c) $p(X = 5) = 0{,}2007$

7. X = «número de envases sin etiqueta» sigue una distribución binomial $B(6; 0{,}15)$.

a) $p(X = 10) = 0{,}3771$

b) $p(X < 3) = 0{,}9527$

24 Distribuciones continuas. Distribución normal

1. Calcula el valor de c para que la función $f(x) = \begin{cases} c(4 - 2x) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ sea la función de densidad de una variable aleatoria continua y halla el valor de la media.

2. La función de densidad de una variable aleatoria continua viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcula la media de la distribución.

b) Obtén el valor de $p(X \geqslant 1)$.

3. Utiliza la tabla de la distribución N(0, 1) para calcular las siguientes probabilidades:

a) $p(Z < 0{,}75)$

b) $p(Z \leqslant -1{,}2)$

c) $p(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 0{,}5)$

d) $p(1 \leqslant Z < 2)$

e) $p(-0{,}8 < Z < 1{,}2)$

4. La duración media de las bombillas de una cierta marca sigue una distribución normal de media 7 200 horas y desviación típica 500 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla se funda después de las 8 000 horas de uso?

5. El tiempo de hospitalización en una determinada zona sanitaria sigue una distribución normal de media 7 días y desviación típica 3 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo esté menos de cinco días en el hospital?

b) ¿Qué tanto por ciento de los enfermos está hospitalizado más de ocho días?

6. El número diario de visitantes de un parque de atracciones se distribuye según una normal N(2 000, 250).

a) Halla la probabilidad de que en un día determinado el número de visitantes no supere los 2 100.

b) Calcula la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1 500.

c) En un mes de treinta días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2 210?

d) Si se quieren clasificar los días en tres tipos de manera que el 15 % se considere «de baja asistencia», el 60 % «de asistencia media» y el 25 % «de asistencia masiva», ¿cuáles han de ser las cuotas de visitantes que marquen el paso de un tipo a otro?

7. Las alturas de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media igual a 1,75 m y varianza igual a 64 cm². Calcula la probabilidad de que:

a) Un individuo tenga una altura mayor que 180 cm.

b) Un individuo tenga una altura menor que 170 cm.

c) Un individuo tenga una altura comprendida entre 170 y 180 cm.

d) Si se quiere considerar como individuos de «talla especial» a aquellas personas que estén fuera del intervalo central que contiene al 70 % de la población, ¿qué alturas determinan esta caracterización?

8. El 40 % de los habitantes en edad laboral de una determinada población se emplea en la agricultura. Si elegimos quince trabajadores al azar de esa población, calcula la probabilidad de que al menos tres de ellos se dedique a la agricultura, aplicando:

a) La distribución binomial.

b) La aproximación normal a la distribución binomial.

SOLUCIONES

1. $1 = \int_0^2 c(4-2x)\,dx = c(4x - x^2]_0^2 = 4c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$

$\mu = \int_0^2 x\,\frac{1}{4}(4-2x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx =$
$= \frac{1}{4}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

2. a) $\mu = \int_x^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx =$
$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

b) $p(X \geqslant 1) = \int_1^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}$

3. a) $p(Z < 0{,}75) = 0{,}7734$

b) $p(Z \leqslant -1{,}2) = p(Z > 1{,}2) = 1 - p(Z \leqslant 1{,}2) =$
$= 0{,}1151$

c) $p(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = p(Z \leqslant 0{,}5) - p(Z \leqslant -0{,}5) =$
$= 0{,}383$

d) $p(1 \leqslant Z < 2) = p(Z \leqslant 2) - p(Z \leqslant 1) =$
$= 0{,}1359$

e) $p(-0{,}8 < Z < 1{,}2) = p(Z \leqslant 1{,}2) - p(Z \leqslant -0{,}8) =$
$= 0{,}673$

4. X es $N(7\,200,\ 500) \Rightarrow Z = \frac{X - 7\,200}{500}$ es $N(0,\ 1)$

$p(X > 8\,000) = p\left(Z > \frac{8\,000 - 7\,200}{500}\right) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}6) = 0{,}0548$

5. X es $N(7,\ 3) \Rightarrow Z = \frac{X - 7}{3}$ es $N(0,\ 1)$

a) $p(X < 5) = p\left(Z < \frac{5 - 7}{3}\right) =$
$= p(Z < -0{,}067) = 0{,}2514$

b) $p(X > 8) = 1 - p(Z < 0{,}33) = 0{,}3707$

Aproximadamente el 37 % de los enfermos.

6. X es $N(2\,000,\ 250) \Rightarrow Z = \frac{X - 2\,000}{250}$ es $N(0,\ 1)$

a) $p(X < 2\,100) = p(Z < 0{,}4) = 0{,}6554$

b) $p(X > 1\,500) = p(Z > -2) = 0{,}9772$

$p(X > 2\,210) = p(Z > 0{,}84) = 0{,}2005$

c) En treinta días, $30 \cdot 0{,}2005 = 6{,}015$.

El número esperado de días es 6.

d) Buscamos los valores z_1 y z_2 tales que:

$p(Z < z_1) = 0{,}15$ y $p(Z > z_2) = 0{,}25$

$p(Z < z_1) = 0{,}15 \Rightarrow p(Z < -z_1) = 0{,}85 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1 = -1{,}04 \Rightarrow x_1 = 250z_1 + 2\,000 = 1\,740$

$p(Z > z_2) = 0{,}25 \Rightarrow p(Z < z_2) = 0{,}75 \Rightarrow$
$\Rightarrow z_2 = 0{,}68 \Rightarrow x_2 = 250z_2 + 2\,000 = 2\,170$

Las cuotas deben ser 1 740 visitantes y 2 170 visitantes.

7. X es $N\left(175,\ \sqrt{64} = 8\right) \Rightarrow Z = \frac{X - 175}{8}$ es $N(0,\ 1)$

a) $p(X > 180) = p(Z > 0{,}63) = 0{,}2643$

b) $p(X < 170) = p(Z < -0{,}63) = 0{,}2643$

c) $p(170 < X < 180) = p(-0{,}63 < Z < 0{,}63) =$
$= 0{,}4714$

d) $p(-m < Z < m) = 0{,}7 \Rightarrow 2\left[p(Z < m) - \frac{1}{2}\right] = 0{,}7 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(Z < m) = 0{,}85 \Rightarrow m = 1{,}04$

Las alturas son:
$x_1 = 8 \cdot (-1{,}04) + 175 = 166{,}68$ cm
$x_2 = 8 \cdot 1{,}04 + 175 = 183{,}32$ cm

8. a) $B(15;\ 0{,}4)$; $p(X \geqslant 3) = 1 - p(Z < 3) =$
$= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)] =$
$= 0{,}9729$

b) X' es $N(6;\ 1{,}9)$; $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X < 3) =$
$= 1 - p(X' \leqslant 2{,}5) = 1 - p(Z \leqslant -1{,}84) =$
$= p(Z < 1{,}84) = 0{,}9671$