GEOMETRÍA ANALÍTICA. TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio nº 1.- *(1,5 puntos)*

Teniendo en cuenta que $tg\ 50° = 1,19$; halla (sin usar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $sen\ 140°$

b) $tg\ 230°$

b) $cos\ 770°$

Ejercicio nº 2.- *(1 punto)*

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{sen\,x\cos x}{\cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1}{2} tg\, 2x$$

Ejercicio nº 3.- *(1 punto)*

Resuelve la ecuación:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

Ejercicio nº 4.- *(1,5 puntos)*

Calcula $\sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3}$.

Ejercicio nº 5.- *(1 punto)*

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$ y $\vec{v}(3, m)$:

a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.
b) Halla un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

Ejercicio nº 6.- ***(1 punto)***

Halla un vector $\vec{v}$ de módulo $\sqrt{10}$ y que forme con $\vec{u}(1,-2)$ un ángulo de 45°.

Ejercicio nº 7.- ***(1 punto)***

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ y forma un ángulo de 45° con la recta r : $2x - y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 8.- ***(1,5 puntos)***

Halla el área del triángulo de vértices:

$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.- ***(1,5 puntos)***

Teniendo en cuenta que *tg* 50° = 1,19; halla (sin usar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) *sen* 140° **b) *tg* 230°** **c) *cos* 770°**

Solución:

a) $sen\ 140° = sen\ (90° + 50°) = cos\ 50°$

b) $tg\ 230° = tg\ (180° + 50°) = tg\ 50° = 1,19$

c) $cos\ 770° = cos\ (2 \cdot 360° + 50°) = cos\ 50°$

Hallamos *cos* 50° a partir de *tg* 50°:

$$1 + tg^2\ 50° = \frac{1}{cos^2\ 50°} \rightarrow 1 + 1{,}19^2 = \frac{1}{cos^2\ 50°} \rightarrow 1 + 1{,}4161 = \frac{1}{cos^2\ 50°} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2{,}4161 = \frac{1}{cos^2\ 50°} \rightarrow cos^2\ 50° = \frac{1}{2{,}4161} \rightarrow cos\ 50° \approx 0{,}64$$

Por tanto:

a) $sen\ 140° = cos\ 50° = 0{,}64$

b) $tg\ 230° = tg\ 50° = 1{,}19$

c) $cos\ 770° = cos\ 50° = 0{,}64$

Ejercicio nº 2.- ***(1 punto)***

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1}{2} tg\,2x$$

Solución:

$$\frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x - sen^2 x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x - sen^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x - sen^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\,2x}{cos\,2x} = \frac{1}{2} tg\,2x$$

Ejercicio nº 3.- ***(1 punto)***

Resuelve la ecuación:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

Solución:

$z^2 - 4z + 5 = 0$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Hay dos soluciones: $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$

Ejercicio nº 4.- ***(1,5 puntos)***

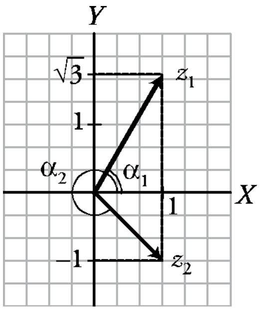
Calcula $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3}$**.**

Solución:

Pasemos a forma polar $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ y $z_2 = 1-i$:

$$|z_1| = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2; \quad tg\ \alpha_1 = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \alpha_1 = 60° \ \rightarrow \ z_1 = 2_{60°}$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad tg\ \alpha_2 = -1 \ \rightarrow \ \alpha_2 = 315° \ \rightarrow \ z_2 = \sqrt{2}_{315°}$$



$$\sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3} = \sqrt[4]{\left(\frac{2_{60°}}{\sqrt{2}_{315°}}\right)^3} = \sqrt[4]{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{-255°}\right]^3} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{2}_{105°}\right)^3} = \sqrt[4]{\sqrt{8}_{315°}}$$

De los infinitos argumentos que admite un número complejo, hemos tomado el que está entre 0° y 360°; por ello pasamos de -255° a -255° + 360° = 105°.

Hallamos las raíces cuartas:

$$\sqrt[4]{\sqrt{8}_{315°}} = \sqrt[4]{\sqrt{8}}_{\frac{315°+360°k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$$

Las raíces son:

$$\sqrt[8]{8}_{78,75°}, \quad \sqrt[8]{8}_{168,75°}, \quad \sqrt[8]{8}_{258,75°}, \quad \sqrt[8]{8}_{348,75°}, \text{ esto es, } \sqrt[8]{8}_{78°\,45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{168°\,45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{258°\,45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{348°\,45'}$$

Ejercicio nº 5.- ***(1 punto)***

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$ **y** $\vec{v}(3, m)$**:**

a) Calcula m **para que** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **sean perpendiculares.**
b) Halla un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$**.**

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \ \rightarrow \ (-1, 4)\cdot(3, m) = 0 \ \rightarrow \ -3+4m = 0 \ \rightarrow \ m = \frac{3}{4}$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{w}(4, 1)$ cuyo módulo es $|\vec{w}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}.$

El vector $\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}, \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \left(\dfrac{4\sqrt{17}}{17}, \dfrac{\sqrt{17}}{17}\right)$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

Ejercicio nº 6.- *(1 punto)*

Halla un vector $\vec{v}$ de módulo $\sqrt{10}$ y que forme con $\vec{u}(1,-2)$ un ángulo de 45°.

Solución:

Sea $\vec{v}(x, y)$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{10} \rightarrow x^2+y^2 = 10$$

$$cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = cos\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{(1,-2)\cdot(x,y)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x-2y}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2(x-2y) = \sqrt{100} \rightarrow 2(x-2y) = 10 \rightarrow x-2y = 5$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=5 \\ x^2+y^2=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 5+2y \\ \rightarrow (5+2y)^2+y^2 = 10 \rightarrow 25+20y+4y^2+y^2 = 10 \rightarrow 5y^2+20y+15 = 0 \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow y^2+4y+3 = 0 \rightarrow y = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} \begin{cases} y=-3 \rightarrow x = 5+2y = 5-6 = -1 \\ y=-1 \rightarrow x = 5+2y = 5-2 = 3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\vec{v}_1(-1,-3)$ y $\vec{v}_2(3,-1)$

Ejercicio nº 7.- *(1 punto)*

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(–1, 3) y forma un ángulo de 45° con la recta *r* : 2*x* – *y* + 1 = 0.

Solución:

$r: 2x - y + 1$, por tanto, su pendiente es 2.

Llamemos m a la pendiente de la recta cuya ecuación queremos calcular:

$$tg\,45° = \left|\frac{2-m}{1+m}\right| = 1 \begin{cases} \dfrac{2-m}{1+2m} = 1 \rightarrow 2-m = 1+2m \rightarrow 1 = 3m \rightarrow m = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2-m}{1+2m} = -1 \rightarrow 2-m = -1-2m \rightarrow 3 = -m \rightarrow m = -3 \end{cases}$$

Hay, por tanto, dos soluciones:

Ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 3)$ y $m = \dfrac{1}{3}$:

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x+1) \rightarrow 3y = 9 + x + 1 \rightarrow x - 3y + 10 = 0$$

Ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 3)$ y $m = -3$:

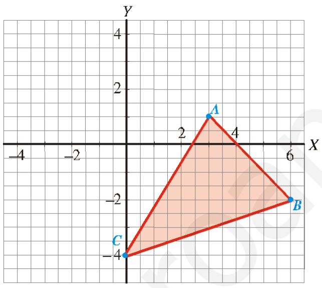
$$y = 3 - 3(x + 1) \rightarrow y = 3 - 3x - 3 \rightarrow 3x + y = 0$$

<u>Ejercicio nº 8.-</u> (1,5 puntos)

Halla el área del triángulo de vértices:

$A(3, 1)$ $B(6, -2)$ $C(0, -4)$

Solución:



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$\text{base} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|(-6, -2)\right| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C. Por tanto, hallamos la ecuación de dicha recta:

$$pendiente = \frac{-4+2}{0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = -12 + x \rightarrow r: x - 3y - 12 = 0$$

Entonces, la altura es:

$$altura = dist(A, r) = \frac{|3 - 3 - 12|}{\sqrt{1+9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) Por tanto, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \dfrac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \ \text{u}^2$$