

Ejercicio nº 1. (1 punto) Racionaliza y simplifica cuando puedas:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

Ejercicio nº 2. (1 punto) Comprueba que:

$$\frac{\log 10a - \log \sqrt{100a}}{\log \sqrt[3]{a^2}} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio nº 3. (1 punto) Obtén el desarrollo de:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$$

Ejercicio nº 4. (1 punto) Calcula el coeficiente de x^3 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^7$$

Ejercicio nº 5. (1 punto) Descomponer en factores irreducibles el polinomio:

$$x^5 + 4x^4 - x^3 - 4x^2 = 0$$

Ejercicio nº 6. (1 punto) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss:

$$\begin{array}{r} x - 2y + z - 6 \\ 3x - y - z - 7 \\ x - y + 2z - 6 \end{array}$$

Ejercicio nº 7. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x - 3} + x = 7$

b) $\frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{4}$

Ejercicio nº 8. (2 puntos) Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\ln(3x-1) = \ln 2 + \ln(4x-6)$

b) $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1. (punto)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1+2\sqrt{5}+5+\sqrt{5}-5-1+\sqrt{5}}{5-1} = \frac{4\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$$

Ejercicio nº 2. (1 punto)

$$\frac{\log 10a - \log \sqrt{100a}}{\log \sqrt[3]{a^2}} = \frac{\log 10 + \log a - \frac{1}{2} \log 10^2 a}{\log a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1 + \log a - \frac{1}{2}(2 \log 10 + \log a)}{\frac{2}{3} \log a} =$$

$$= \frac{1 + \log a - \frac{1}{2}(2 + \log a)}{\frac{2}{3} \log a} = \frac{1 + \log a - 1 - \frac{1}{2} \log a}{\frac{2}{3} \log a} = \frac{\frac{1}{2} \log a}{\frac{2}{3} \log a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio nº 3. (1 punto)

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 = x^8 + 8x^7 \cdot \frac{1}{x} + 28x^6 \cdot \frac{1}{x^2} + 56x^5 \cdot \frac{1}{x^3} + 70x^4 \cdot \frac{1}{x^4} + 56x^3 \cdot \frac{1}{x^5} + 28x^2 \cdot \frac{1}{x^6} + 8x \cdot \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} =$$

$$= x^8 + 8x^6 + 28x^4 + 56x^2 + 70 + \frac{56}{x^2} + \frac{28}{x^4} + \frac{8}{x^6} + \frac{1}{x^8}.$$

Ejercicio nº 4. (1 punto)

El coeficiente que ocupa el lugar k en el desarrollo del binomio es de la forma:

$$(-1)^{k-1} \cdot \binom{7}{k-1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{7-(k-1)} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1} \cdot \binom{7}{k-1} \frac{x^{8-k}}{2^{8-k}} \cdot \frac{2^{k-1}}{x^{k-1}} = (-1)^{k-1} \cdot \binom{7}{k-1} \cdot 2^{2k-9} \cdot x^{9-2k}.$$

Para que $9 - 2k = 3 \rightarrow 6 = 2k \rightarrow k = 3$. Tenemos que hallar el término que ocupa la 3ª posición, cuyo coeficiente es:

$$(-1)^2 \cdot \binom{7}{2} \cdot 2^{-3} = \frac{21}{8}$$

Ejercicio nº 5. (1 punto)

Sacamos factor común:

$$x^2 (x^3 + 4x^2 - x - 4) = 0$$

La descomposición factorial del polinomio es la siguiente:

$$x^5 + 4x^4 - x^3 - 4x^2 = x^2 (x-1)(x+1)(x+4) = 0$$

Factorizamos $x^3 + 4x^2 - x - 4$:

	1	4	-1	-4
1		1	5	4
	1	5	4	0
-1		-1	-4	
	1	4		0

Ejercicio nº 6. (1 punto)

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 6 \\ 3x + y - z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 6 \\ 7y - 4z = -11 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 7 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 6 \\ -11z = -11 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \frac{-11}{-11} = 1 \\ y = -z = -1 \\ x = 6 + 2y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array} \quad \text{Solución: } x = 3, y = -1, z = 1$$

Ejercicio nº 7. (2 puntos)

a) $\sqrt{3x - 3} + x = 7$

$$\sqrt{3x - 3} = 7 - x$$

$$3x - 3 = (7 - x)^2$$

$$3x - 3 = 49 + x^2 - 14x$$

$$0 = x^2 - 17x + 52$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{17 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Comprobación:

$$x_1 = 13 \rightarrow \sqrt{36} + 13 = 6 + 13 = 19 \neq 7 \rightarrow x_1 = 13 \text{ no vale}$$

$$x_2 = 4 \rightarrow \sqrt{9} + 4 = 3 + 4 = 7 \rightarrow x_2 = 4 \text{ sí vale}$$

Hay una sola solución: $x = 4$

b) $\frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{4}$

$$\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)} + \frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$$

$$8x + 8 + 4(x^2 - 3x + 2) = 5(x^2 - 1)$$

$$8x + 8 + 4x^2 - 12x + 8 = 5x^2 - 5$$

$$0 = x^2 + 4x - 21$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Se comprueban ambos valores y los dos son válidos. Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -7$

Ejercicio nº 8. (2 puntos)

a) $\ln(3x - 1) = \ln 2 + \ln(4x - 6)$

$$\ln(3x - 1) = \ln[2(4x - 6)]$$

$$3x - 1 = 2(4x - 6) \rightarrow 3x - 1 = 8x - 12$$

$$11 = 5x \rightarrow x = \frac{11}{5}$$

Comprobando este valor, se ve que es válido. Por tanto, hay una única solución: $x = \frac{11}{5}$

b) Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$$y + \frac{1}{y} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9} \rightarrow 9y^2 + 9 - 3y = 79y$$

$$9y^2 - 82y + 9 = 0$$

$$y = \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{18} = \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{18} = \frac{82 \pm 80}{18} \rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

• $y = 9 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2$

• $y = \frac{1}{9} \rightarrow 3^x = \frac{1}{9} \rightarrow x = -2$

Hay dos soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$