ÁLGEBRA

1. Resuelve las inecuaciones

a) $\dfrac{x^2}{x-2} \leq 9$ b) $|3x-4| \leq 5$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{\log 2 + \log\left(11-x^2\right)}{\log(5-x)} = 2$ b) $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{x^3-1}{2\left(x^2-1\right)}$ b) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = -1$

4. Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} x^2-6x+8 \leq 0 \\ x(x-1) \geq x^2+3x+1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 2x-y \leq 3 \end{array}\right\}$

5. a) Opera y simplifica, racionalizando en su caso: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

b) Resuelve por el método de Gauss el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=11 \\ x \quad +y+2z=\ 4 \\ 3x+4y+7z=15 \end{array}\right\}$

TRIGONOMETRÍA – GEOMETRÍA

1. Si a es un ángulo del segundo cuadrante cuya tangente es – 2 y b es un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno es $-\dfrac{1}{2}$. Halla mediante fórmulas:

   a) Las restantes razones trigonométricas de a y b.
   b) $\cos(a-b)$
   c) $tg\left(\dfrac{a}{2}\right)$

2. Resuelve la ecuación $4 sen\, x - 2 cosec\, x = 2$

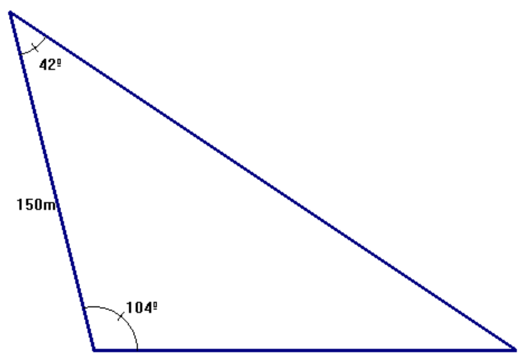
3. Dado el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,8)$ y $C(4,10)$, se pide:

a) Longitud del lado AB.

b) Longitud de la altura que parte del vértice C.

c) Área del triángulo.

4. Calcula los metros de valla necesarios para cercar la finca representada en el siguiente dibujo, así como la superficie de dicha finca.



5. Halla el punto simétrico del punto $A(-3,0)$ respecto de la recta r: $x+2y-3=0$

ANÁLISIS

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-4}$

a) Estudia su continuidad y halla sus asíntotas
b) Estudia su crecimiento y halla sus extremos
c) Represéntala gráficamente

2. Se dispone de 100 m de alambrada. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo de mayor área que puede rodearse con ésta alambrada?

3. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2-5}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$

4. Calcula las ecuaciones de las recta tangente y normal a la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x=1$.

5. Calcula las derivadas de las funciones:

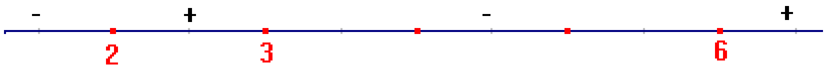
a) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2+6}}$ b) $f(x)=e^{2x}\cdot\arccos x$

SOLUCIONES

ÁLGEBRA

1. a) $\dfrac{x^2}{x-2} \le 9 \rightarrow \dfrac{x^2}{x-2} - 9 \le 0 \rightarrow \dfrac{x^2-9x+18}{x-2} \le 0 \qquad x^2-9x+18=0 \rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ 3 \end{array} \right.$

$x-2=0 \rightarrow x=2$



Solución: $(-\infty,2) \cup [3,6]$

b) $|3x-4| \le 5 \rightarrow -5 \le 3x-4 \le 5 \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-4 \ge -5 \\ 3x-4 \le 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x \ge -1 \\ 3x \le 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \ge -\frac{1}{3} \\ x \le 3 \end{array}\right\}$

Solución: $\left[-\dfrac{1}{3}, 3\right]$

2. a) $\dfrac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2 \rightarrow \log 2 + \log(11-x^2) = 2\log(5-x)$

$\log 2(11-x^2) = \log(5-x)^2 \rightarrow 22-2x^2 = 25-10x+x^2 \rightarrow 3x^2-10x+3=0$

$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \dfrac{10 \pm 8}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right.$ Ambas soluciones son válidas

b) $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0 \rightarrow 7^{2x} - 10 \cdot 7^x + 21 = 0 \rightarrow z = 7^x \rightarrow z^2 - 10z + 21 = 0$

$z = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} = \dfrac{10 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 7 \\ 3 \end{array} \right. \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} z = 7^x = 7 \rightarrow x = 1 \\ z = 7^x = 3 \rightarrow x \ln 7 = \ln 3 \rightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 7} \end{array} \right.$

3. a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{x^3-1}{2(x^2-1)} \qquad$ m.c.m. $= 2(x+1)(x-1)$

$\dfrac{x(x^2-1)}{2(x^2-1)} - \dfrac{2 \cdot 2(x-1)}{2(x^2-1)} + \dfrac{3 \cdot 2(x+1)}{2(x^2-1)} = \dfrac{x^3-1}{2(x^2-1)} \rightarrow x^3 - x - 4x + 4 + 6x + 6 = x^3 - 1$

$x + 10 = -1 \rightarrow x = -11$

b) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = -1 \rightarrow \sqrt{3x-2} = \sqrt{x+3} - 1 \rightarrow 3x-2 = x+3-2\sqrt{x+3}+1$

$3x-2-x-3-1 = -2\sqrt{x+3} \rightarrow 2x-6 = -2\sqrt{x+3} \rightarrow x-3 = -\sqrt{x+3}$

$(x-3)^2 = \left(-\sqrt{x+3}\right)^2 \rightarrow x^2-6x+9 = x+3 \rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 6 \end{array} \right.$

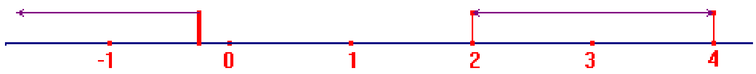
Comprobación:

$x = 1 \rightarrow \sqrt{3-2} - \sqrt{1+3} = -1 \rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{4} = -1 \rightarrow 1-2 = -1$ Válida

$x = 6 \rightarrow \sqrt{18-2} - \sqrt{6+3} = -1 \rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{9} = -1 \rightarrow 4-1 \ne -1$ No válida

4. a) $\left.\begin{array}{l} x^2-6x+8 \le 0 \\ x(x-1) \ge x^2+3x+1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (x-2)(x-4) \le 0 \\ x^2-x \ge x^2+3x+1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (x-2)(x-4) \le 0 \\ 0 \ge 4x+1 \rightarrow x \le -\frac{1}{4} \end{array}\right\}$

Solución de la primera ecuación: $(2,4)$ Solución de la segunda ecuación: $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$

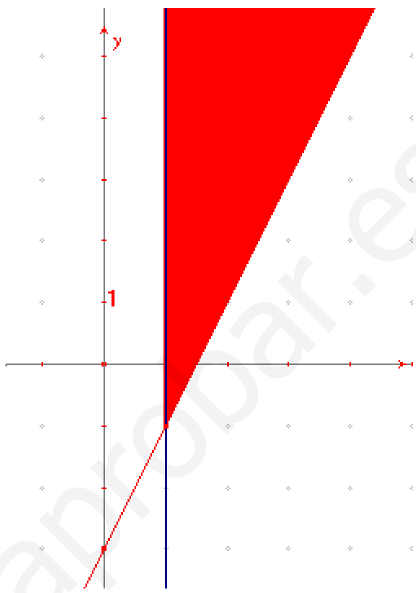


Solución del sistema: ϕ (la intersección de ambas soluciones)

b) $\left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ 2x-y\leq 3 \end{array}\right\}$ representamos las

rectas: $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2x-3 \end{array}\right\}$ y señalamos los

semiplanos que corresponden a cada inecuación, la intersección de ambos semiplanos es la solución del sistema (en rojo, en la solución también entra el segmento correspondiente a la segunda recta)



5. a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}-\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{2-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}^2-1\right)}-\frac{3\cdot 2+3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}^2-1\right)}=$

b) Resuelve por el método de Gauss el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=11 \\ x \quad +y+2z=\ \ 4 \\ 3x+4y+7z=15 \end{array}\right\} E_1 \leftrightarrow E_2$

$$\left.\begin{array}{l} x \quad +y+2z=4 \\ 2x+3y+5z=11 \\ 3x+4y+7z=15 \end{array}\right\}\left\langle\begin{array}{l} E_2-2E_1 \\ E_3-3E_1 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad +y+2z=4 \\ \quad\ +y+z=3 \\ \quad\ +y+z=3 \end{array}\right\} E_2-E_3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad +y+2z=4 \\ \quad\ +y+z=3 \end{array}\right\}$$

Sistema compatible indeterminado, llamamos $t=z$

Solución: $\left\{\begin{array}{l} x=1+3t \\ y=3-t \\ z=t \end{array}\right.$ dándole valores a t obtendríamos las distintas soluciones

TRIGONOMETRÍA - GEOMETRÍA

1. Si tg a = - 2 $(a \in \text{II cuadrante})$ y cos b = $-\frac{1}{2}$ $(b \in \text{III cuadrante})$.

a) Las restantes razones trigonométricas de a y b:

$$1+tg^2a=\frac{1}{\cos^2 a}\rightarrow 1+4=\frac{1}{\cos^2 a}\rightarrow \cos^2 a=\frac{1}{5}\rightarrow \cos a=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$sen^2a+\cos^2 a=1\rightarrow sen^2a=1-\frac{1}{5}\rightarrow sen^2a=\frac{4}{5}\rightarrow sen\,a=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 b+\cos^2 b=1\rightarrow \operatorname{sen}^2 b=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\rightarrow \operatorname{sen} b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \operatorname{tg} b=\sqrt{3}$$

b) $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b=-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot-\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{10}$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$ positiva, ya que el ángulo mitad de a estará en el primer cuadrante

2. $4\operatorname{sen} x-2\operatorname{cosec} x=2\rightarrow 4\operatorname{sen} x-\frac{2}{\operatorname{sen} x}=2\rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x-2=0$

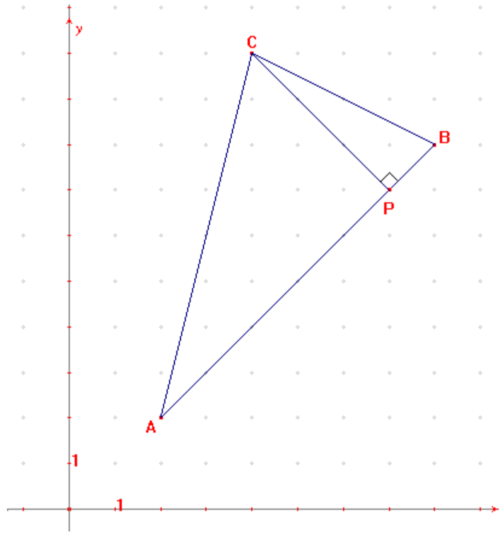
$$2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x-1=0\rightarrow \operatorname{sen} x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}\operatorname{arcsen}(1)=90^\circ+360^\circ k\\ \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}210^\circ+360^\circ k\\ 330^\circ+360^\circ k\end{cases}\end{cases}\quad k\in Z$$

3. Dado el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(8,8)$ y $C(4,10)$, se pide:

a) Longitud del lado AB.

$d(A,B)=\sqrt{(8-2)^2+(8-2)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}u$



b) Longitud de la altura que parte del vértice C

Hallamos primero la ecuación de la altura (CP):

$\vec{d}_{AB}=(6,6)\rightarrow \vec{d}_{CP}=(-1,1)$ y pasa por $C(4,10)$

$\frac{x-4}{-1}=\frac{y-10}{1}\rightarrow x+y-14=0$

el punto P será la intersección de las rectas CP y AB: $\frac{x-2}{6}=\frac{y-2}{6}\rightarrow x-y=0$

$$\left.\begin{matrix}x-y=0\\ x+y-14=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \left.\begin{matrix}x=y\\ 2x-14=0\end{matrix}\right\}\rightarrow x=7, y=7$$

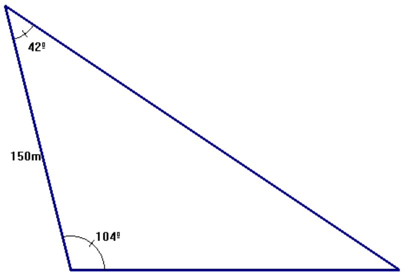
P(7,7), longitud de la altura: $d(C,P)=\sqrt{(7-4)^2+(7-10)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}u$

c) Área del triángulo: $A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2}=18u^2$

4. Calcula los metros de valla necesarios para cercar la finca representada en el siguiente dibujo, así como la superficie de dicha finca.

$A=42^\circ, B=104^\circ\rightarrow C=180-146=34^\circ$

aplicamos el teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$



$$\frac{a}{\text{sen}42^\circ}=\frac{150}{\text{sen}34^\circ}\rightarrow a=179{,}5\text{m}$$
$$\frac{b}{\text{sen}104^\circ}=\frac{150}{\text{sen}34^\circ}\rightarrow b=260{,}275\text{m}$$

Metros de valla: 150+179,5+260,275=589,75

Para hallar la superficie, necesitamos una altura, vamos a calcular la correspondiente al vértice B: $\text{sen}42^\circ=\frac{h}{150}\rightarrow h=150\,\text{sen}42^\circ=100{,}37\text{m}$

$$A=\frac{260{,}275\cdot 100{,}37}{2}=13.061{,}85\text{m}^2$$

5. Halla el punto simétrico del punto $A(-3,0)$ respecto de la recta r: $x+2y-3=0$

hallamos primero la ecuación de una recta s perpendicular a la dada y que pase por A: $\vec{d_r}=(-2,1)\rightarrow \vec{d_s}=(1,2)\rightarrow s\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y-0}{2}\rightarrow 2x+6=y\rightarrow 2x-y+6=0$

Ahora hallamos el punto P, intersección de ambas rectas, que será el punto medio del segmento AA' (siendo A' el simétrico de A, es decir, el punto pedido)

$$\left.\begin{array}{l}x+2y-3=0\\2x-y+6=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y-3=0\\4x-2y+12=0\end{array}\right\}\rightarrow 5x+9=0\rightarrow x=-\frac{9}{5}\rightarrow y=\frac{12}{5}$$

$$P\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)=\left(\frac{-3+x}{2},\frac{0+y}{2}\right)\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}-18=-15+5x\rightarrow x=-\frac{3}{5}\\24=5y\rightarrow y=\frac{24}{5}\end{array}\right.\rightarrow A'\left(-\frac{3}{5},\frac{24}{5}\right)$$

ANÁLISIS

1. Dada la función $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$

Continuidad y asíntotas: f es continua en $R-\{4\}$

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2}{x-4}=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{x^2}{x-4}=\frac{16}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2}{x-4}=\frac{16}{0^+}=+\infty\end{array}\right.$ x = 4 A.Vertical

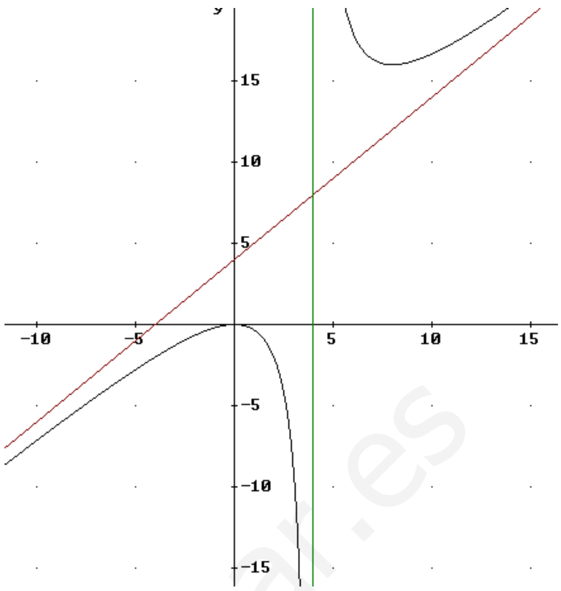
Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-4}=\infty$ no tiene

Asíntota oblicua: $y=mx+n\rightarrow m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4x}=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+4x}{x-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x-4}\right)=4\rightarrow y=x+4$$

Crecimiento y extremos: $f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}=0\rightarrow x(x-8)=0$

Posibles extremos: $x(x-8)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$



sg(f')	+	0	-	4	-	8	+
f es	creciente		decreciente		decreciente		creciente

Máximo (0,0)
AV x = 4
Mínimo (8,16)

2. Se dispone de 100 m de alambrada. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo de mayor área que puede rodearse con ésta alambrada?

Perímetro $\rightarrow 2x+2y=100 \Rightarrow x+y=50 \Rightarrow y=50-x$

La función que hay que maximizar es el área del rectángulo: $f(x)=A=x\cdot y$

$f(x)=x(50-x)=50x-x^2 \rightarrow f'(x)=50-2x=0 \Rightarrow x=25$

sg(f')	+	25	-
f es	creciente	MÁX	decreciente

El área es máxima para $x=25 \rightarrow y=50-25=25$

Solución: El rectángulo de área máxima es un cuadrado de 25 metros de lado

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2-5}\right)^x=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4x^2-1}{4x^2-5}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{4x^2-5}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x^2-5}{4}}\right)^{\frac{4x^2-5}{4}\cdot x\cdot\frac{4}{4x^2-5}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{4x^2-5}}=e^0=1$$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)}{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(7+x-9)}{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{7+x}+3)}=\frac{1}{6}$$

4. Calcula las ecuaciones de las recta tangente y normal a la gráfica de

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ en el punto de abscisa $x=1 \rightarrow f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Recta tangente: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

Recta normal: $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1) \rightarrow y - \frac{1}{2} = -2(x-1) \rightarrow y = -2x + \frac{5}{2}$

5. Calcula las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+6}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+6}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+6}}} \cdot \frac{2x(x^2+6)-(x^2+2)2x}{(x^2+6)^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\frac{x^2+2}{x^2+6}} \cdot \frac{2x^3+12x-2x^3-4x}{(x^2+6)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)(x^2+6)}$$

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \arccos x \rightarrow f'(x) = 2e^{2x}\arccos x + e^{2x}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = e^{2x}\left(2\arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$