Ejercicio 1. *Sabiendo que* $\operatorname{tg} x = -2$ *y que* x *es un ángulo del segundo cuadrante, calcular exactamente* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$. *Obtener con ayuda de la calculadora el ángulo* x.

Solución:

Puesto que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

Sustituyendo y tomando la raíz negativa puesto que el ángulo se encuenta en el segundo cuadrante:

$$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{1 + (-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

y puesto que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{tg} x$$

resulta que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot (-2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Para calcular el ángulo x obtenemos mediante la calculadora artg 2 $= 63^{\mathrm{o}}26'6''$ y, puesto que el ángulo está en el segundo cuadrante:

$$x = 180^{\mathrm{o}} - 63^{\mathrm{o}}26'6'' = 116^{\mathrm{o}}33'54''$$

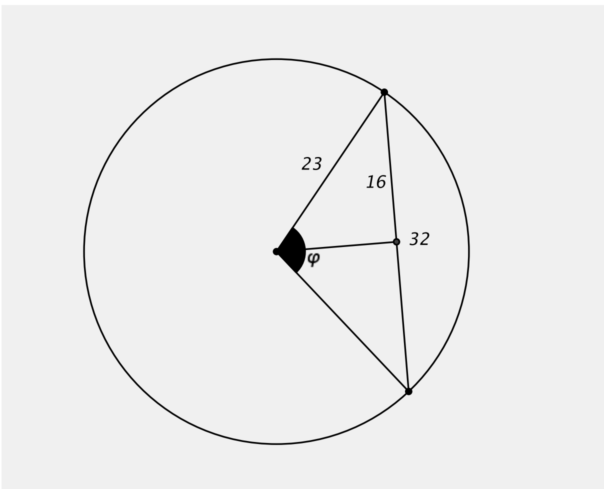
Ejercicio 2. *En una circunferencia de radio* 23 *cm, calcular el área del segmento circular limitado por una cuerda de* 32 *cm.*

Solución:

El área de un segmento circular puede obtenerse como la diferencia del área del sector y el área del triángulo. Esto conduce a la fórmula:

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$

donde φ es el ángulo en radianes.



De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\frac{16}{23}\quad\Longrightarrow\quad\varphi=1{,}5387$$

y sustituyendo en la fórmula se obtiene que el área es $S=142{,}61$ cm.

Ejercicio 3. *Resolver la ecuación* $\cos 2x=1+4\operatorname{sen}x$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ resulta:

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x-1=0$$

Sustituyendo ahora $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$:

$$\begin{aligned}&1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x-1=0\\&-2\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x=0\\&\operatorname{sen}x(2\operatorname{sen}x+4)=0\end{aligned}$$

De aquí obtenemos $\operatorname{sen}x=0$ y $\operatorname{sen}x=-2$. La segunda igualdad no conduce a ninguna solución pues el seno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1. La primera nos da las soluciones $x=0^{\circ}\pm 360^{\circ}K$ y $x=180^{\circ}\pm 360^{\circ}K$.

Ejercicio 4. *Resolver* $2\operatorname{sen}x+3\cos x=3$.

Solución:

Podemos sustituir $\cos x$ por $\sqrt{1-\operatorname{sen}x}$ o mejor considerar el sistema:

$$\begin{aligned}2\operatorname{sen}x+3\cos x&=3\\\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x&=1\end{aligned}$$

Despejamos $\cos x$ de la primera ecuación:

$$\cos x=\frac{3-2\operatorname{sen}x}{3}$$

Sustituimos en la segunda ecuación y resulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 x+\frac{(3-2\operatorname{sen}x)^2}{9}&=3\\\operatorname{sen}^2 x+\frac{9+4\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x}{9}&=1\\9\operatorname{sen}^2 x+9+4\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x&=9\\13\operatorname{sen}^2 x-12\operatorname{sen}x&=0\\\operatorname{sen}x(13\operatorname{sen}x-12)&=0\end{aligned}$$

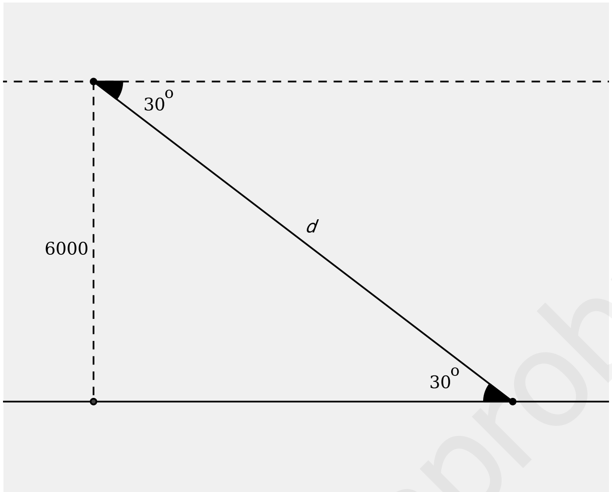
Tenemos dos soluciones para $\operatorname{sen}x$:

- $\operatorname{sen}x=0\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=0^{\circ}\pm 360^{\circ}K\\x=180^{\circ}\pm 360^{\circ}K\end{cases}$
- $\operatorname{sen}x=\dfrac{12}{13}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=67^{\circ}22'48''\pm 360^{\circ}K\\x=112^{\circ}37'12''\pm 360^{\circ}K\end{cases}$

Al haber transformado la ecuación de primer grado en una de segundo grado, es posible que hayamos obtenido soluciones no válidas de la ecuación original. Por ello debemos comprobar las soluciones. Así, encontramos que 0° y $67^{\circ}22'48''$ son soluciones válidas y que 180° y $112^{\circ}37'12''$ no lo son.

Ejercicio 5. *Desde la altura de 6000 m, el piloto de un avión observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30°. Calcular la distancia entre el avión y el foco.*

Solución:



De la figura se deduce que:

$$6000 = d \operatorname{sen} 30^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{6000}{\operatorname{sen} 30^{\circ}} = 12000$$

La distancia es de 12000 m.

Ejercicio 6. *Resolver un triángulo del que se conocen* $a = 24\text{m}$, $B = 55^{\circ}15'$ *y* $C = 68^{\circ}42'$.

Solución:

Calculamos el tercer ángulo:

$$A = 180^{\circ} - 55^{o}15' - 68^{o}42' = 56^{\circ}3'$$

Los lados los calculamos por el teorema del seno:

$$\frac{24}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = \frac{b}{\operatorname{sen} 55^{\circ}15'} = \frac{c}{\operatorname{sen} 68^{\circ}42'}$$

Así calculamos

$$b = \frac{24 \operatorname{sen} 55^{\circ}15'}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = 23,77; \qquad c = \frac{24 \operatorname{sen} 68^{\circ}42'}{\operatorname{sen} 56^{\circ}3'} = 26{,}96$$

Los lados miden $23,77$ m y 26,96 m.
