Ejercicio 1 *Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*

Solución:

$$\begin{aligned}
x = x_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \\
y = y_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = y_0 \\
y = mx + b \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x\to \infty} [f(x) - (mx+b)] = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Define el número e como límite. A partir de esta definición calcula el límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y aplícalo para resolver las indeterminaciones del tipo 1^∞.

Solución:

El número e se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

A partir de esta definición:

$$\text{lím}\, x \to 0 \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

en donde se ha aplicado la propiedad del logaritmo de la potencia. La equivalencia entre $\ln(1+x)$ y x cuando x tiende a cero nos sirve para transformar los límites indeterminados del tipo 1^∞:

sea el límite $A = \lim u^v$ donde u tiende a 1 y v tiende a ∞.

$$A = \lim u^v \quad \Longrightarrow \quad \ln A = \lim v \ln u = \lim v \ln[1 + (u-1)]$$

Puesto que $u \to 1$, $u - 1 \to 0$ y $\ln[1 + (u-1)]$ es equivalente a $u - 1$. Entonces:

$$\ln A = \lim v(u-1) \quad \Longrightarrow \quad A = e^{\lim v(u-1)}$$

Ejercicio 3 *Explica qué es un punto de discontinuidad evitable y pon un ejemplo.*

Solución:

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punt x_0 si existe el límite de la función cuando x tiende a x_0 pero no coincide con el valor de la función en ese punto, bien porque para x_0 la función no exista o bien porque tome un valor diferente del límite.

Por ejemplo la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$. Para ese valor no existe la función pero existe el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Ejercicio 4 *Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 3x^2 - 2x + 3$ y la recta $y = 2x + 2$. Representa gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Los puntos de intersección se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Así se obtienen los puntos $A_1(1,4)$ y $A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Con estos dos puntos se puede representar la recta. Para representar la parábola debemos calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes. El vértice es:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

La ordenada del vértice se calcula sustituyendo el valor de la abscisa que hemos obtenido en la ecuación de la parábola. En este caso no es necesario puesto que se trata de uno de los puntos de intersección con la recta. Resulta pues

$$V\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

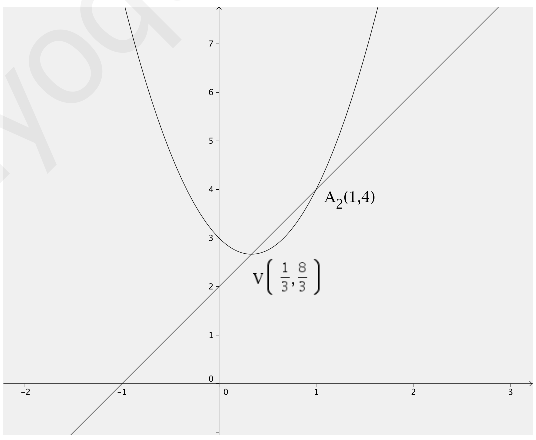
Los puntos de corte con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

que no tiene solución y. por consiguiente no hay puntos de inteersección de la parábola con el eje de abscisas. La intersección con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0,3)$$

La representación gráfica es:



Ejercicio 5 *Calcular el dominio de definición de la función $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$*

Solución:

Para que exista la función el radicando debe ser positivo o cero:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0\right\}$$

Para resolver la inecuación calculamos las raíces. Éstas resultan ser $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$. Puesto que el coeficiente de x^2 en el polinomio es negativo, éste será positivo entre las raíces (¿por qué?). El dominio es entonces:

$$\text{Dominio } = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2+5x-2 \geq 0\right\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Ejercicio 6 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$$

Solución:

En el primer límite, al sustituir x por 3 resulta que tanto el numerador como el denominador se hacen cero. Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que en el caso de que las funciones sean polinómicas se resuelve simplificando la fracción.

Factorizamos numerador y denominador aplicando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 10 & 12 \\ -3 & & -3 & -6 & -12 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & & -3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x+4}{x^2-x+1} = \frac{7}{13}$$

El segundo límite es una indeterminación del mismo tipo que se resuelve también simplificando la fracción:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x-\sqrt{3}}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{1}{x+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ejercicio 7 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x-1}-x\right); \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x-1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5x-1}-x)(\sqrt{x^2+5x-1}+x)}{\sqrt{x^2+5x-1}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+5x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+5x-1}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \infty$$

porque las funciones potenciales tienden más rápidamente a infinito que las funciones logarítmicas.

Ejercicio 8 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2^x+x^2}$$

Solución:

Para el primer límite aplicamos la transformación que se ha visto para los límites indeterminados del tipo 1^∞:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2}{3x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{3x-2-3x-1}{3x+1}2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x}{3x}} = e^{-2}\end{aligned}$$

En cuanto al segundo límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2^x+x^2}=\infty$$

porque las dos funciones exponenciales son infinitos de orden superior a la función potencial y entre ellas es mayor la de mayor base, es decir e^x.

Ejercicio 9 *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y=\frac{2x+1}{x^2-4}$$

Solución:

Las asíntotas verticales se obtienen entre los valores de x que anulan el denominador:

$x=-2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

$x=2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

La asintota horizontal se obtiene calculando el límite de la función cuando x tiende a ∞

$$\lim x\to\infty\frac{2x+1}{x^2-4}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=0 \text{ es asíntota}$$

Puesto que hay una asíntota horizontal no buscamos asíntotas oblicuas.

Ejercicio 10 *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

Solución:

Basta aplicar las equivalencias estudiadas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$