Ejercicio 1

1. *Calcular el punto medio del segmento de extremos* $A(5,-1)$ *y* $B(4,2)$.
2. *Calcular el punto simétrico de* $A(3,-1)$ *respecto de* $P(6,-3)$.

Solución:

1. El punto medio se calcula por:

$$x = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}; \qquad y = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Sea $A'(x',y')$ el punto simétrico de A respecto a P. Puesto que P es punto medio del segmento AA' resulta:

$$\begin{aligned} 6 = \frac{3+x'}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 3+x' = 12 \quad \Longrightarrow \quad x' = 9 \\ -3 = \frac{-1+y'}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -1+y' = -6 \quad \Longrightarrow \quad y' = -5 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Calcular la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto* $P(2,-2)$ *y cuya pendiente es* -3.

Solución:

Si conocemos un punto $P(2,-2)$ y la pendiente de la recta $m=-3$, la ecuación de la recta en la forma punto pendiente es:

$$y + 2 = -3\cdot(x-2)$$

Pasando todos los términos al primer miembro de la igualdad se obtiene la ecuación implícita:

$$3x + y - 4 = 0$$

Ejercicio 3 *Calcular la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos* $A(-1,-2)$ *y* $B(0,5)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5-(-2)}{0-(-1)} = 7$$

El punto B nos da la ordenada en el origen 5. La ecuación explícita es:

$$y = 7x + 5$$

Ejercicio 4 *Dados los puntos* $P(3,2)$ *y* $Q(-2,4)$, *y la recta* $r:\ y = 2x-3$ *calcula la distancia:*

1. *Entre* P *y* Q.
2. *De* P *a* r.

Solución:

1. $$d(P,Q)=\sqrt{(-2-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

2. Para calcular la distancia del punto a la recta, primero se escribe la ecuación de la recta en forma implícita:
$$y=2x-3 \quad\Longrightarrow\quad 2x-y-3=0 \quad\Longrightarrow\quad d(P,r)=\left|\frac{2\cdot 3-2-3}{\sqrt{4+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 5 *Calcular el ángulo que forman las rectas $r:\ 3x-5y+6=0$ y $s:\ y=-2x+1$ en grados, minutos y segundos.*

Solución:

La primera recta tiene pendiente $m_1=\frac{3}{5}$ y la segunda $m_2=-2$. El ángulo agudo entre las dos rectas es:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{\frac{3}{5}-(-2)}{1+\frac{3}{5}\cdot(-2)}\right|=\left|\frac{\frac{13}{5}}{\frac{-1}{5}}\right|=13$$

de donde $\varphi=85^{\text{o}}36'5''$

Ejercicio 6 *¿Cuál ha de ser el valor de k para que las rectas $x+3y-2=0$ y $kx+2y+3=0$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?*

Solución:

Para que sean paralelas debe cumplirse que:

$$\frac{1}{k}=\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{2}{3}$$

y para que sean perpendiculares:

$$1\cdot k+3\cdot 2=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-6$$

Ejercicio 7 *Calcular las ecuaciones de la paralela y la perpendicular a la recta $2x+5y-6=0$ por el punto $P(-1,4)$.*

Solución:

La recta dada tiene pendiente $m=-\frac{2}{5}$. La paralela tiene la misma pendiente y la perpendicular la opuesta de la inversa. Así pues las dos rectas son:

$$y-4=-\frac{2}{5}(x+1) \qquad \text{paralela}$$
$$y-4=\frac{5}{2}(x+1) \qquad \text{perpendicular}$$

Ejercicio 8 *Calcular los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas*:
$r:\ x-y-2=0,\quad s:\ 2x+3y-9=0,\quad t:\ x=0$

Solución:

Los vértices se obtienen como intersección de las rectas dadas:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array}\right.$$

Así pues los vértices son $A(3,1)$, $B(0,-2)$ y $C(0,3)$.

Para calcular el área podemos aprovechar que los vértices B y C están sobre el eje de ordenadas. Tomamos como base la longitud del lado BC que vale $BC=5$ y como altura la distancia de $A(3,1)$ al eje de ordenadas que vale 3. El área es:

$$S=\frac{1}{2}\,5\cdot 3=\frac{15}{2}$$

Ejercicio 9 *Dados los puntos $A(-1,3)$ y $B(2,-1)$ escribe la condición que deben cumplir las coordenadas del punto $C(x,y)$ para que el triángulo ABC sea rectángulo en C*

Solución:

Sea $C(x,y)$. Si el triángulo es rectángulo en C, AC y BC son perpendiculares, de modo que el producto de las pendientes de estas rectas es -1:

$$\frac{y-3}{x+1}\cdot\frac{y+1}{x-2}=-1 \quad \Longrightarrow \quad (y-3)(y+1)=-(x+1)(x-2) \quad \Longrightarrow \quad y^2-2y-2=-x^2+x+2$$

condición que puede escribirse:

$$x^2+y^2-x-2y-4=0$$

Veremos más adelante que esta ecuación representa una circunferencia.

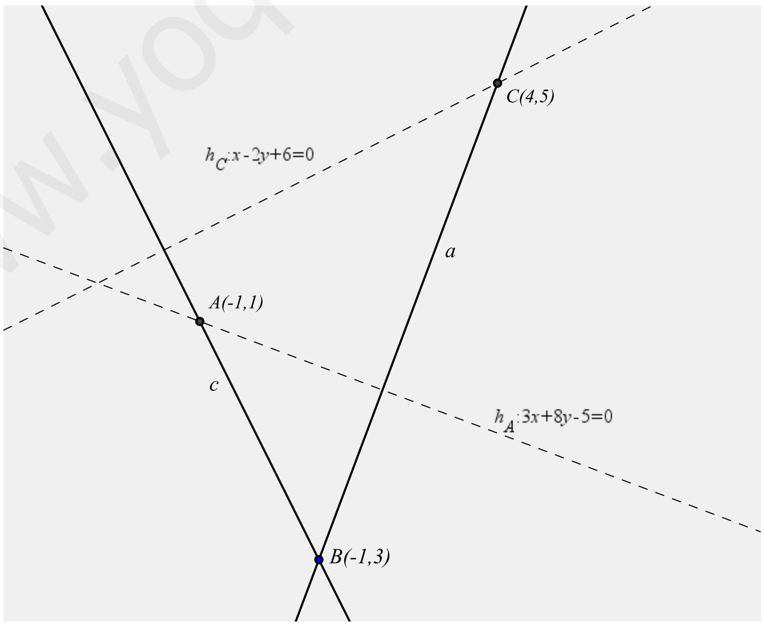

Figura 1: Triángulo conocido un vértice y dos alturas

Ejercicio 10 *Las rectas $3x + 8y - 5 = 0$ y $x - 2y + 6 = 0$ son dos alturas del triángulo ABC de vértice $B(1, -3)$. Calcular las coordenadas de los vértices A y C*

Solución:

Vemos en primer lugar que el punto B no cumple ninguna de las dos ecuaciones. Éstas son por tanto, las alturas correspondientes a los vértices A y C.

$$h_A : \ 3x + 8y - 5 = 0, \qquad h_C : \ x - 2y + 6 = 0$$

El lado a pasa por el vértice B y es perpendicular a h_A (ver figura 1). Como h_A tiene pendiente $-\frac{3}{8}$ el lado a tiene de ecuación:

$$a : \ y + 3 = \frac{8}{3} \cdot (x - 1) \quad \Longrightarrow \quad 8x - 3y - 17 = 0$$

De la misma forma, el lado c pasa por el vértice B y es perpendicular a h_C. Como h_C tiene pendiente $\frac{1}{2}$ el lado c tiene de ecuación:

$$c : \ y + 3 = -2 \cdot (x - 1) \quad \Longrightarrow \quad 2x + y + 1 = 0$$

Ahora para hallar el vértice A calculamos la intersección del lado c y de la altura h_A

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x + 8y - 5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(-1, 1)$$

El vértice C lo calculamos como intersección del lado a y de la altura h_C:

$$\begin{cases} 8x - 3y - 17 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad C(4, 5)$$
