05137

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,-1)$, es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$.

Solución:

El plano que nos piden, π', al ser paralelo a la recta r, contiene al vector director de esta recta. $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

la dirección de la recta r viene determinada por el vector $\vec{u}=(2,1,0)$.

Como el plano π' debe ser perpendicular al plano π, el vector normal al plano π estará contenido en π' $\Rightarrow$
$\pi \equiv 2x-y+z+1=0 \Rightarrow \vec{\eta}=(2,-1,1)$; *y como el plano π' tiene que pasar por el punto $P(1,0,-1)$ ya tenemos los elementos necesarios para calcular su ecuación:*

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{\eta}=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-2y-4z-5=0$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\dfrac{y-3}{n}=\dfrac{z}{2}$

- Hallar n para que r y s sean paralelas.
- Para el valor de n obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas.
- Para ese mismo valor de n, calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

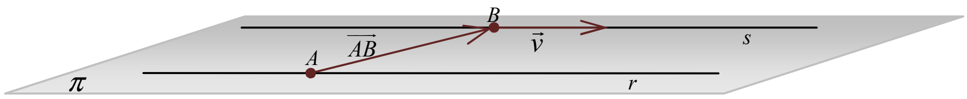
$$r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{pasando a las ecuaciones paramétricas} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,-2,1) \text{ punto de } r \\ \vec{u}=(1,1,2) \text{ vector de } r \end{cases}$$

$$s \equiv x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(-1,3,0) \text{ punto de } s \\ \vec{v}=(1,n,2) \text{ vector de } s \end{cases}$$

Para que r y s sean paralelas, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser proporcionales $\Rightarrow \dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{2} \Rightarrow n=1$

El plano π que contiene a r y a s, estará determinado por un punto, $A \in r$ o $B \in s$, y dos vectores con direcciones diferentes, uno $\vec{v}$ y el otro $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,5,-1) \; ; \; \pi \equiv \begin{cases} A(0,-2,1) \\ \overrightarrow{AB}=(-1,5,-1) \\ \vec{v}=(1,1,2) \end{cases} \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi \equiv 11x+y-6z+8=0$$



Para calcular la distancia entre r y s, hallamos la ecuación de un plano π' que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a r) y sea perpendicular al plano π, es decir, que contenga al vector $\vec{\eta}=(11,1,-6)$, normal a π.

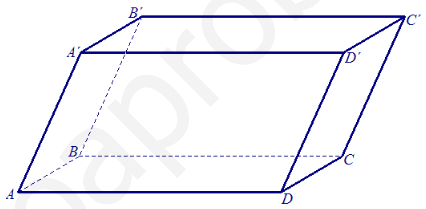
$$\pi' \equiv \begin{cases} A(0,-2,1) \\ \vec{v}=(1,1,2) \\ \vec{\eta}=(11,1,-6) \end{cases} \Rightarrow \quad \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv -4x+14y-5z+33=0$$

Ahora tenemos que $d(r,s)=d(B,\pi')=\dfrac{|(-4)\cdot(-1)+14\cdot 3-5\cdot 0+33|}{\sqrt{(-4)^2+14^2+(-5)^2}}=\dfrac{79}{\sqrt{237}}=\dfrac{\sqrt{237}}{3}u$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea el paralelepípedo de vértices $ABCDA'B'C'D'$ del que conocemos las coordenadas de los vértices $A(0,-1,1)$, $B(1,0,2)$, $D(-2,1,1)$, $A'(1,1,-1)$. Se pide:

- Calcular el volumen de dicho paralelepípedo.
- Obtener la ecuación del plano que contiene a la cara $CDD'C'$.
- Determinar las coordenadas del punto medio de la arista $B'C'$ expresadas en el sistema de referencia $\Re=\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\}$.

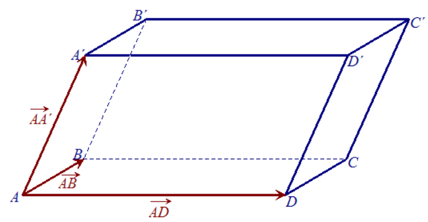


Solución:

$A(0,-1,1)$, $B(1,0,2)$, $D(-2,1,1)$, $A'(1,1,-1)$

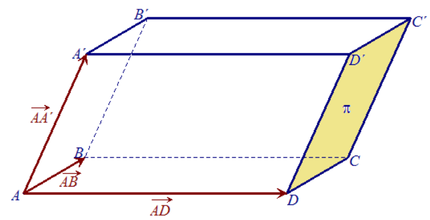
Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AA'}=(1,2,-2)$, *y el volumen del paralelepípedo será:*

$$V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right]\right|=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AA'}\right)=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right\|=|-14|=14u^3$$

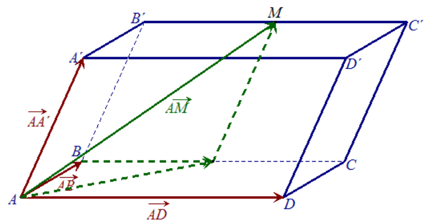


Llamamos π al plano que contiene a la cara $CDD'C'$

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene al punto } D(-2,1,1) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(1,1,1) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AA'}=(1,2,-2) \end{cases} \Rightarrow \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv -4x+3y+z-12=0$$



Para encontrar las coordenadas del punto medio del lado $B'C'$, que llamamos M, debemos conseguir las coordenadas del vector $\overrightarrow{AM}$ en el sistema de referencia $\Re$, es decir, hay que poner el vector $\overrightarrow{AM}$ como combinación lineal de los vectores $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\}$ que forman la base del sistema de referencia con origen en el punto A.



Primero buscamos el vector que une el punto A con el punto medio del lado BC. Ese vector se obtiene como $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Si a este vector le sumamos el vector $\overrightarrow{AA'}$ *conseguimos el vector* $\overrightarrow{AM}$. *Entonces* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$, *por tanto*:

$\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ *en la base* $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right\}$ $\Rightarrow$ $M\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ *en el sistema de referencia* $\mathfrak{R}$.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4}$ y el plano $\pi\equiv 2x+3y+z=0$, hallar las ecuaciones de una recta s que se apoya en r perpendicularmente y está contenida en el plano π.

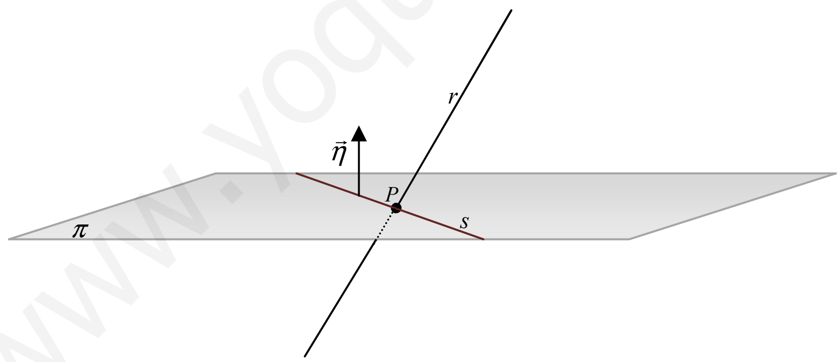
Solución:

Si la recta pedida tiene que estar contenida en el plano π, *su vector director debe ser perpendicular al vector normal al plano. Como* $\pi\equiv 2x+3y+z=0 \Rightarrow \vec{\eta}=(2,3,1)$

Como la recta s tiene que cortar a r perpendicularmente, su vector director será perpendicular al vector de r.

$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4} \Rightarrow \vec{v}=(2,3,-4)$

Entonces $\vec{u}'=\vec{v}\wedge\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2 & 3 & -4\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=15\vec{e}_1-10\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{u}'=(15,-10,0)$; $\vec{u}=(3,-2,0)$ *tiene la misma dirección que* $\vec{u}'$.



Si s está en el plano π *y corta a la recta r, obligatoriamente tiene que pasar por el punto P, intersección entre la recta r y el plano* π.

$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-4} \Rightarrow$ *expresada en paramétricas* $r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-3+3\lambda\\ z=-2-4\lambda\end{cases}$, $P\in r \Rightarrow P(1+2\lambda,-3+3\lambda,-2-4\lambda)$

$\pi\equiv 2x+3y+z=0$

$P\in\pi \Rightarrow$ *verifica la ecuación del plano*: $2(1+2\lambda)+3\cdot(-3+3\lambda)+(-2-4\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1$, *entonces* $P(3,0,-6)$

Ahora la recta pedida $s\equiv\begin{cases}\text{pasa por el punto } P(3,0,-6)\\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u}=(3,-2,0)\end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=3+3\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=-6\end{cases}$

− *s corta a r en el punto P.*

− *s está contenida en* π *porque pasa por* $P\in\pi$ *y su dirección es perpendicular al vector* $\vec{\eta}$, *normal a* π.

− *s es perpendicular a r porque su vector director,* $\vec{u}$, *es perpendicular a* $\vec{v}$, *vector director de r.*