Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

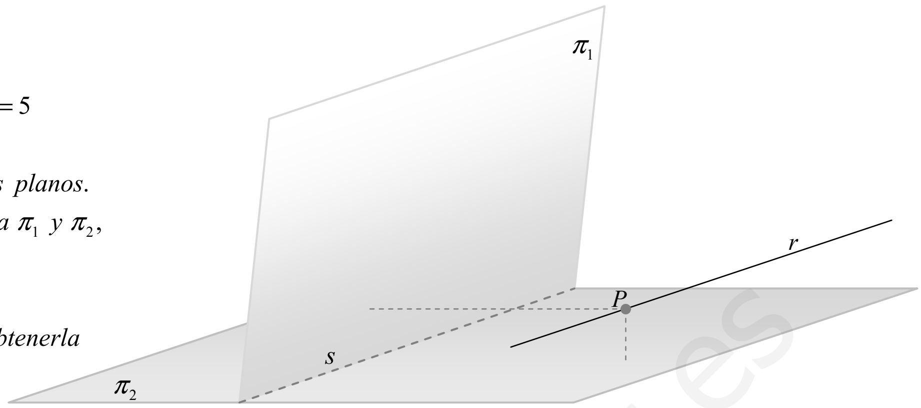
Encontrar la ecuación de la recta que es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x-3y+z=0$, $\pi_2 \equiv 2x-y+3z=5$, y pasa por el punto $P=(2,-1,5)$. Calcular también la distancia de dicha recta a los dos planos.

Solución:

$\pi_1 \equiv x-3y+z=0$, $\pi_2 \equiv 2x-y+3z=5$

Si s es la recta intersección de los dos planos. La recta pedida r, como es paralela a π_1 y π_2, también es paralela a s.

La dirección de la recta r podemos obtenerla de dos formas:



$$1.- \textit{a partir de las ecuaciones paramétricas de } s \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-y+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \textit{resolviendo el sistema} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3-\frac{8}{5}\lambda \\ y = 1-\frac{1}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

con lo que la dirección de la recta s viene determinada por el vector $\vec{u}=\left(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)$ *o por* $\vec{v}=5\vec{u}=(-8,-1,5)$

$2.-$ *como s está contenida en π_1 y en π_2, su dirección es perpendicular a los vectores normales de ambos planos* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v}=\vec{\eta}_1 \wedge \vec{\eta}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}=(-8,-1,5)$$

$$\textit{Ahora la recta } r \equiv \begin{cases} \textit{pasa por el punto } P(2,-1,5) \\ \textit{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(-8,-1,5) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{-8}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{5}$$

Para calcular la distancia de la recta r a los planos usamos la fórmula de disancia de un punto a un plano.

$$d(r,\pi_1)=d(P,\pi_1)=\frac{|2-3\cdot(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{11}}u \quad ; \quad d(r,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|2\cdot 2-1\cdot(-1)+3\cdot 5-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{14}}u$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$ $\quad y \quad$ $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ z=3 \end{cases}$

- Comprobar si las dos rectas son paralelas.
- Determinar, si es posible, la ecuación del plano que las contiene.
- Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \text{ pasando a las ecuaciones paramétricas } \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1,0,-1) \text{ punto de } r \\ \vec{u}=(2,1,1) \text{ vector de } r \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \text{ pasando a las ecuaciones paramétricas } \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(0,0,3) \text{ punto de } s \\ \vec{v}=(-1,1,0) \text{ vector de } s \end{cases}$$

como $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son proporcionales* $\Rightarrow r$ *y* s *no son rectas paralelas.*

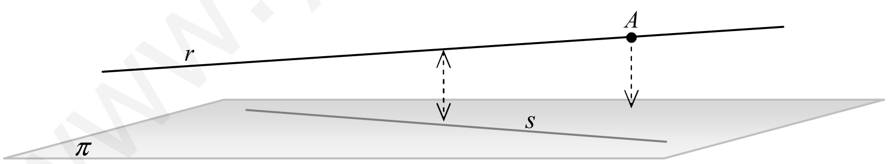
Si el vector $\overrightarrow{AB}$, *determinado por los puntos* $A \in r$ *y* $B \in s$, *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las dos rectas son coplanarias y se cortan en un punto. Pero si* $\overrightarrow{AB}$ *es linealmente independiente con* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *las rectas están en distinto plano y se cruzan.*

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,4) \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son linealmente independientes } \Rightarrow \text{No existe un plano que contenga a } r \text{ y } s.$$

Para calcular la distancia entre r *y* s, *hallamos la ecuación de un plano* π *que contenga a una de las dos rectas* (*p. ej. a* s) *y sea paralelo a la otra* (r)

$$\pi \equiv \begin{cases} B(0,0,3) \\ \vec{v}=(-1,1,0) \\ \vec{u}=(2,1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-3z+9=0$$

Ahora tenemos que $d(r,s)=d(A,\pi)=\dfrac{|-1+0-3\cdot(-1)+9|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}\,u$



Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P=(1,1,-3)$ y $Q=(-1,0,0)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A=(4,3,-5)$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo y el área del mismo.

Solución:

Los puntos P y Q están en una misma recta s cuyo vector director es $\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)$

Los otros dos vértices, R y T, pertenecen a una recta r, paralela a s y que pasa por el punto A.

$$r\equiv\begin{cases}\text{contiene al punto } A(4,3,5)\\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)\end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=4-2\lambda\\ y=3-\lambda\\ z=-5+3\lambda\end{cases}$$

Calculemos ahora dos planos π_1 y π_2 perpendiculares a la recta r y que contengan a los puntos P y Q respectivamente. Entonces tendremos que $T=r\cap\pi_1$ y $R=r\cap\pi_2$

El vector normal a π_1 y π_2 es $\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3)$

$$P\in\pi_1 \Rightarrow \pi_1\equiv-2(x-1)-1\cdot(y-1)+3\cdot(z+3)=0 \Rightarrow \pi_1\equiv-2x-y+3z+12=0$$

$$Q\in\pi_2 \Rightarrow \pi_2\equiv-2(x+1)-1\cdot(y-0)+3\cdot(z-0)=0 \Rightarrow \pi_2\equiv-2x-y+3z-2=0$$

$$T=r\cap\pi_1 \text{ , } T\in r \Rightarrow T(4-2\lambda,3-\lambda,-5+3\lambda)$$

$$T\in\pi_1 \Rightarrow -2(4-2\lambda)-(3-\lambda)+3(-5+3\lambda)+12=0$$

$$\lambda=1 \Rightarrow T(2,2,-2)$$

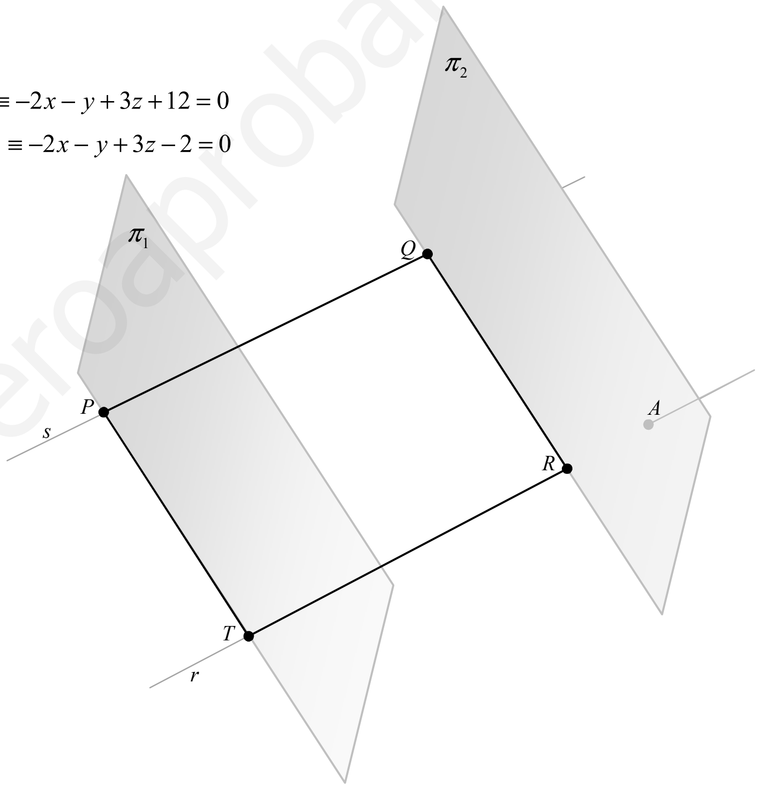
$$R=r\cap\pi_2 \text{ , } R\in r \Rightarrow R(4-2\lambda,3-\lambda,-5+3\lambda)$$

$$R\in\pi_2 \Rightarrow -2(4-2\lambda)-(3-\lambda)+3(-5+3\lambda)-2=0$$

$$\lambda=2 \Rightarrow R(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,3) \quad y \quad \overrightarrow{PT}=(1,1,1)$$

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PT}\right|=\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{42}\ u^2$$



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

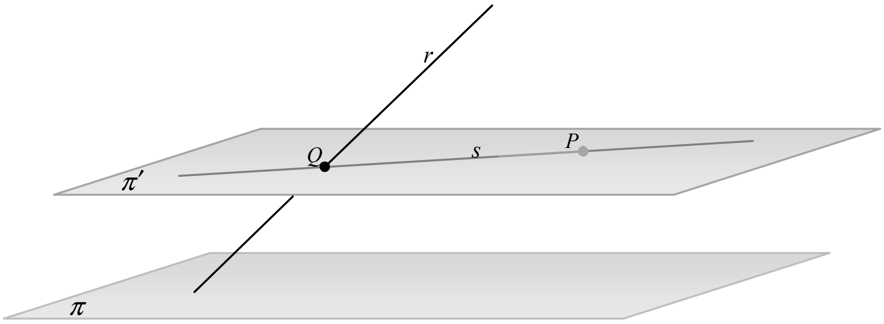
Halla la ecuación de una recta que pase por el punto $(1,-1,2)$, sea paralela al plano $\pi\equiv x-3y+2z=1$ y corte a la recta $r\equiv\begin{cases}x=z-1\\ y=2\end{cases}$.

Solución:

Si la recta pedida tiene que ser paralela al plano π, estará contenida en un plano paralelo a π.

Como r tiene que pasar por el punto P, el plano que contiene a r será $\pi'\equiv\begin{cases}\text{contiene a } P(1,-1,2)\\ \text{su vector normal es } \vec{\eta}=(1,-3,2)\end{cases}$

$$\pi'\equiv1\cdot(x-1)-3\cdot(y+1)+2\cdot(z-2)=0 \Rightarrow \pi'\equiv x-3y+2z-8=0$$



$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ *expresada en paramétricas* $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

El punto Q es la intersección entre la recta r y el plano $\pi' \Rightarrow Q \in r$, *Q es de la forma* $Q(-1+\lambda, 2, \lambda)$

$\pi' \equiv x - 3y + z - 8 = 0$

$Q \in \pi' \Rightarrow$ *verifica la ecuación del plano*: $(-1+\lambda) - 3 \cdot 2 + 2 \cdot \lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$, *entonces* $Q(4,2,5)$

Ahora la recta pedida $s \equiv \begin{cases} \text{pasa por el punto } P(1,-1,2) \\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{PQ} = (3,3,3) \text{ o de } \vec{v} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

− *s corta a r en el punto Q*

− *s es paralela a* π *porque está contenida en* π' *que es un plano paralelo a* π. *Además* $\vec{\eta} \cdot \vec{v} = 0$