Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2,5 puntos.

Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2,5 puntos.

Considera la recta r definida por $r: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A = (2,1,0)$ y $B = (1,0,-1)$.

a) (1 punto). Estudia la posición relativa de ambas rectas.

b) (1,5 puntos) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos.

a) (1 punto). Hallar la distancia desde el punto $P = (1,3,-2)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}.$$

b) (1 punto). Calcular la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases} \text{ y } s \equiv x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$$

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O = (0,0,0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

SOLUCIONES

Ejercicio B.1

Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

Pues está fenomenal esto de que nos den en paramétricas la ecuación de la recta. Así resulta sencillo identificar un punto y un vector director de cada una de ellas:

$$r \equiv \begin{cases} P_r(1,1,-2) \\ \vec{d}_r=(0,0,1) \end{cases}; \qquad s \equiv \begin{cases} P_r(0,0,-1) \\ \vec{d}_s=(1,1,0) \end{cases}; \qquad \overrightarrow{P_sP_r}=(1,2,-1)$$

- Vector director de la recta t perpendicular a r y a s:

$$\overrightarrow{d_t}=\overrightarrow{d_r}\times\overrightarrow{d_s}=(0,0,1)\times(1,1,0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,1,0)$$

- Ecuación del plano α que contiene a r y a t:

$$\alpha \equiv \begin{cases} P_\alpha=P_r(1,1,-2) \\ \vec{u}=\vec{d}_r=(0,0,1) \\ \vec{v}=\vec{d}_t=(-1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 1 & 0 & z+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha \equiv -y+1-x+1=0 \Rightarrow \alpha \equiv -x-y+2=0$$

- Ecuación del plano β que contiene a s y a t:

$$\beta \equiv \begin{cases} P_\beta=P_s(0,0,-1) \\ \vec{u}=\vec{d}_s=(1,1,0) \\ \vec{v}=\vec{d}_t=(-1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \beta \equiv z+1+z+1=0 \Rightarrow \beta \equiv z+1=0$$

- La ecuación de la recta t perpendicular a r y a s es la intersección de los dos planos:

$$t=\alpha\cap\beta \Rightarrow \boxed{t \equiv \begin{cases} -x-y+2=0 \\ z+1=0 \end{cases}}.$$ (2,5 puntos)

Nota.- Este procedimiento de resolución es válido tanto si las rectas se cortan como si se cruzan.

Ejercicio B.2

Considera la recta r definida por $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A=(2,1,0)$ y $B=(1,0,-1)$.

a) (1 punto). Estudia la posición relativa de ambas rectas.

b) (1,5 puntos) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

---

a) Necesitamos unos cuantos elementos para estudiar la posición relativa entre r y s:

- Punto de r: Para $y = 0$, se obtiene $P_r(2,0,0)$
- Vector director de r: $\vec{d}_r = (1,1,0) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$
- Vector director de s: $\vec{d}_s = \overrightarrow{BA} = (2,1,0) - (1,0,-1) = (1,1,1)$
- Vector que une r y s: $\overrightarrow{P_r P_s} = (2,1,0) - (2,0,0) = (0,1,1)$

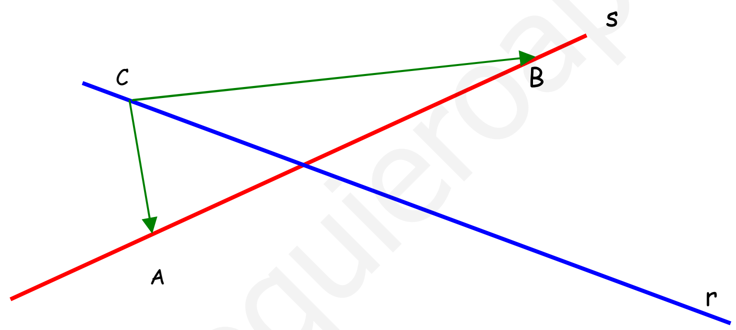
Con todos estos "ingredientes" ya podemos "cocinar" la posición relativa de las rectas a través del estudio de rangos:

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{M} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right); \text{ como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}\,(M) = 2 . \text{ Además, } |M'| = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{ran}\,(M') = 2 .$$

Por lo tanto tenemos $\text{ran}\,(M) = 2 = \text{ran}\,(M') \Rightarrow$ **r y s se cortan**.

(1 punto)

b) La situación es similar a esta, considerando que el ángulo en C ha de ser recto:



Expresamos el punto $C \in IR$ de forma genérica, utilizando las ecuaciones paramétricas:

$$C = (2+\lambda, -\lambda, \lambda)$$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ y aplicamos el criterio de perpendicularidad:

- $\overrightarrow{CA} = A - C = (2,1,0) - (2+\lambda, -\lambda, \lambda) = (-\lambda, 1+\lambda, -\lambda)$
- $\overrightarrow{CB} = B - C = (1,0,-1) - (2+\lambda, -\lambda, \lambda) = (-1-\lambda, \lambda, -1-\lambda)$

$$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (-\lambda, 1+\lambda, -\lambda) \cdot (-1-\lambda, \lambda, -1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda + 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow 3\lambda \cdot (1+\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -1$$

- Para $\lambda = 0$, se obtiene **$C(2,0,0)$**.
- Para $\lambda = -1$, se obtiene **$C(1,1,-1)$**.

(1,5 puntos)

Ejercicio B.3

a) (1 punto). Hallar la distancia desde el punto $P=(1,3,-2)$ a la recta:

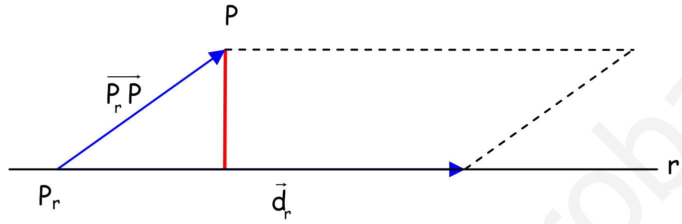
$$r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}.$$

b) (1 punto). Calcular la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 7x-z=-4 \end{cases} \quad y \quad s\equiv x-2=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}.$$

---

a) Idea clave: La distancia entre un punto y una recta es la altura del paralelogramo generados por los vectores $\vec{d}_r$ y $\overrightarrow{P_rP}$.



Por lo tanto,

$$\text{Área del paralelogramo} = \text{Base}\cdot\text{altura} \Rightarrow \left|\vec{d}_r\times\overrightarrow{P_rP}\right| = \left|\vec{d}_r\right|\cdot \text{dist}(P,r) \Rightarrow \text{dist}(P,r)=\frac{\left|\vec{d}_r\times\overrightarrow{P_rP}\right|}{\left|\vec{d}_r\right|}=$$

$$\text{dist}(P,r)=\frac{\sqrt{315}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{315}{14}}=\boxed{\sqrt{\frac{45}{2}}\,u} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\left|\vec{d}_r\times\overrightarrow{P_rP}\right|=\left|(3,1,-2)\times(-1,4,-3)\right|=\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{matrix}\right\|=\left|(5,11,13)\right|=\sqrt{25+121+169}=\sqrt{315}$$

$$\left|\vec{d}_r\right|=\left|(3,1,-2)\right|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$$

b) Idea clave: La distancia entre las rectas r y s es la altura del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Bueno, pues tranquilamente calculamos los elementos necesarios para determinar esta distancia:

- $r:\begin{cases} 3x-y=-1 \\ 7x-z=-4 \end{cases}$; para $x=0$ se obtiene $y=1, z=4 \Rightarrow P_r(0,1,4)$
- $\vec{d}_r=(3,-1,0)\times(7,0,-1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(1,3,7)$
- $s\equiv\begin{cases} P_s(2,2,3) \\ \vec{d}_r=(1,3,4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}=(2,1,-1)$
- $\left|\left[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|=\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|=\left|-3+24+7-42+3-4\right|=\left|-15\right|=15$

o $\quad \left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right| = \left|(1,3,7)\times(1,3,4)\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| = \left|(-9,3,0)\right| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

¡Ya está todo!

$$\text{dist }(r,s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{\left|\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\right|} = \frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{15\sqrt{90}}{90} = \frac{\sqrt{90}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2}\ u.$$

(1 punto)

Ejercicio B.4

Dado el plano $\pi \equiv x+3y+z=4$, se pide:

a) (1 punto). Calcular el punto simétrico P del punto $O=(0,0,0)$ respecto del plano π.

b) (1 punto). Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x=0$.

c) (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$.

---

a) Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r que contiene al punto $O=(0,0,0)$ y es perpendicular al plano π:

$$r \equiv \begin{cases} P_r = O(0,0,0) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (1,3,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

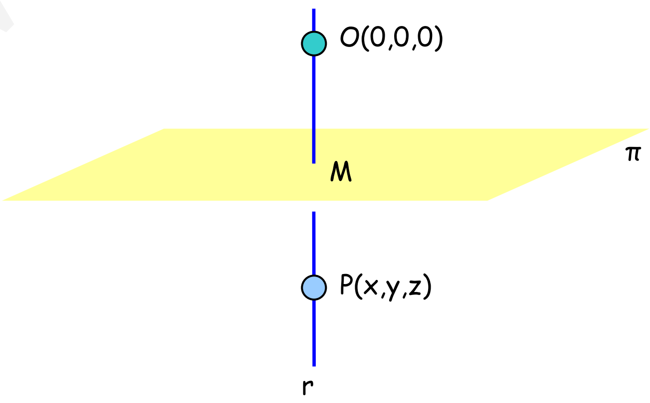
Hallamos el punto M en el que la recta r corta al plano π:

$$M \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \\ x+3y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \lambda+9\lambda+\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{11} \Rightarrow M=\left(\frac{4}{14},\frac{12}{14},\frac{4}{14}\right)$$

Pues bien, M es el punto medio del segmento que une $O=(0,0,0)$ con su punto simétrico $P(x,y,z)$, y por lo tanto se cumple:

$$\frac{x+0}{2}=\frac{4}{11} \Rightarrow x=\frac{8}{11};\quad \frac{y+0}{2}=\frac{12}{11} \Rightarrow y=\frac{24}{11};\quad \frac{z+0}{2}=\frac{4}{11} \Rightarrow z=\frac{8}{11} \Rightarrow P\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right).$$

(1 punto)



b) El ángulo que forman dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales:

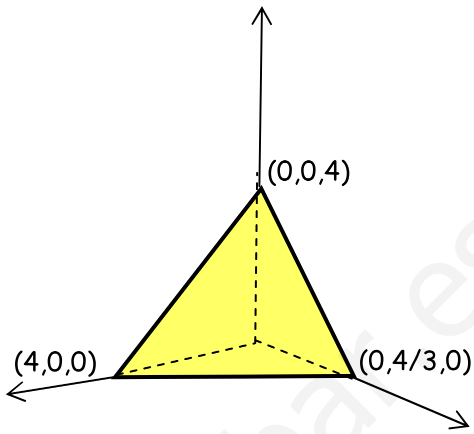
$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{x=0}}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{x=0}|} = \frac{(1,3,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{11}}. \quad \text{(1 punto)}$$

c) Calculamos los vértices del tetraedro:

$$V_1 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+3y+z=4 \end{cases} \Rightarrow V_1(0,0,4);$$

$$V_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ x+3y+z=4 \end{cases} \Rightarrow V_2\left(0,\frac{4}{3},0\right)$$

$$V_3 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x+3y+z=4 \end{cases} \Rightarrow V_3(4,0,0)$$



El cuarto vértice es el origen de coordenadas, por lo tanto el volumen es:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\frac{64}{3} = \frac{32}{9}u^2. \quad \text{(1 punto)}$$