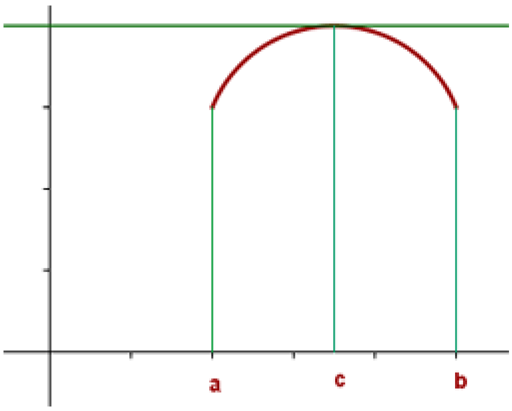
TEOREMA DE ROLLE:

Si una función es:

- **Continua** en [a, b]
- **Derivable** en (a, b)
- Y si **f(a) = f(b)**

Entonces, existe algún punto c ∈ (a, b) en el que **f'(c) = 0**.

La **interpretación gráfica del teorema de Rolle** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.



Ejemplos

1. Estudiar si se verifica el teorema de Rolle en el intervalo [0, 3] de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \le x \le 1 \\ -x + 3 & si\ 1 < x \le 3 \end{cases}$$

En primer lugar comprobamos que la función es continua en x = 1.

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} (-x + 3) = 2$$

En segundo lugar comprobamos si la función es derivable en x = 1.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$f'(1^-) \neq f'(3^+)$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en el intervalo (0, 3) y por tanto no se cumple el teorema de Rolle.

2.¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función f(x) = ln (5 – x^2) en el intervalo [–2, 2]?

En primer lugar calculamos el dominio de la función. $5 - x^2 > 0$ $\quad D = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

La función es continua en el intervalo [–2, 2] y derivable en (–2, 2), porque los intervalos están contenidos en $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$.

Además se cumple que f(–2) = f(2), por tanto es aplicable el teorema de Rolle.

$$\frac{-2c}{5 - c^2} = 0 \qquad c = 0$$

3.Comprobar que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real.

La función $f(x) = x^7 + 3x + 3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

f(–1) = –1

f(0) = 3

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (–1, 0).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 7x^6 + 3$

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por tanto sólo tiene una raíz real.

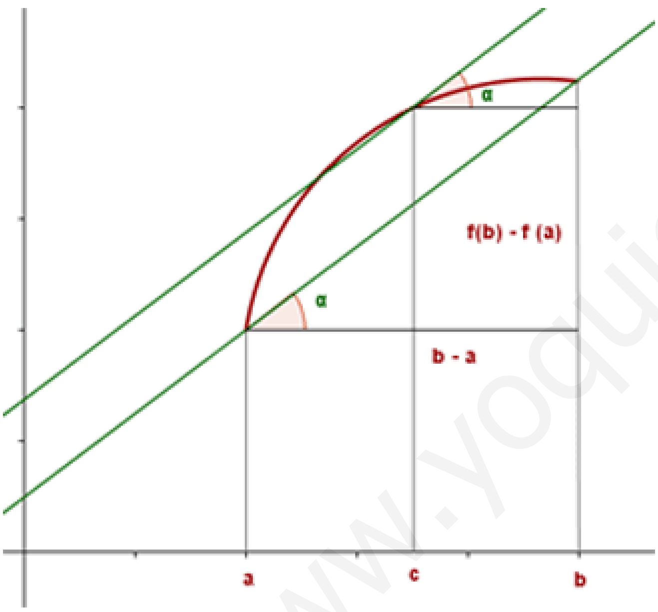
TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DE LAGRANGE:

Si una función es:

- **Continua** en [a, b]
- **Derivable** en (a, b)

Entonces, existe algún punto c ∈ (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La interpretación geométrica del **teorema de Lagrange** nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante.

El teorema de Rolle es un caso particular del **teorema de Lagrange**, en el que **f(a) = f(b)**.

Ejemplo

¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange **a $f(x) = x^3$ en [–1, 2]?**

f(x) es continua en [–1, 2] y derivable en (–1, 2) por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{8-(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \qquad f'(c) = 3 \qquad 3c^2 = 3$$

$$c = 1 \in (-1, 2) \qquad c = -1 \notin (-1, 2)$$

TEOREMA DE CAUCHY:

Si *f* y *g* son funciones continuas en [a, b] y derivables en (a, b), entonces existe un punto c $\in$ (a, b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \begin{matrix} g(b) \neq g(a) \\ g'(c) \neq 0 \end{matrix}$$

El valor del primer miembro es constante:

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad f'(c) = k\,g'(c)$$

La interpretación geométrica del teorema de Cauchy nos dice que existen dos puntos (c, f(c)) y (c, g(c)) de las curvas f(x) y g(x), tales que la pendiente de la tangente a la curva f(x) en el primer punto es *k* veces la pendiente de la tangente a la curva g(x) en el segundo punto.

Al **teorema de Cauchy** también se le suele denominar **teorema del valor medio generalizado**.

Ejemplos

1º- **Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:**

f(x) = x^2 – 2x + 3 y g(x) = x^3 – 7x^2 + 20x – 5.

En caso afirmativo, aplicarlo.

Las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ por ser polinómincas, luego, en particular, son continuas en [1, 4] y derivables en (1, 4) .

Además se cumple que g(1) ≠ g(4).

Por lo tanto se verifica el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{11-2}{27-9}=\frac{2c-2}{3c^2-14c+20}$$

$$3c^2-14c+20=4c-4 \qquad 3c^2-18c+24=0 \qquad c^2-6c+8=0$$

$$c=2\in(1,4) \qquad c=4\notin(1,4)$$

$$g'(c)\neq 0 \qquad 3\cdot 2^2-14\cdot 2+20\neq 0$$

2º-**Analizar si el el teorema de Cauchy es aplicable a las funciones f(x) = sen x y g(x) = cos x en el intervalo [0, π/2].**

Las funciones f(x) = sen x y g(x) = cos x son continuas y derivables en toda la recta real.

Y en particular son continuas en el intervalo [0, π/2] y derivables en (0, π/2).

g(π/2) ≠ g(0)

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Cauchy:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\,0}{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-cos\,0}=\frac{cos\,c}{-sen\,c}$$

$$\frac{1-0}{0-1}=-\frac{1}{tg\,c} \qquad tg\,c=1$$

$$c=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

g' (c) ≠ 0 –sen(π/4) ≠ 0.

REGLA DE L'HOPITAL

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, en donde *f* y *g* son derivables en un **entorno** de *a* y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces este límite coincide con $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para aplicar la regla de L'Hôpital hay que tener un límite de la forma $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde *a* puede ser un número o infinito, y aparecer las indeterminaciones:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\operatorname{tg}(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\operatorname{tg}(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\operatorname{tg}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{4x}{2x^2-1}}{1+\operatorname{tg}^2(x-1)} = 4$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x} = \frac{1}{6}$$

- $$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\frac{2\ln x}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{2-2\ln x}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\operatorname{sen}x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right) = -1$$

Indeterminación infinito menos infinito

En la indeterminación **infinito menos infinito**, si son fracciones, se ponen a común denominador.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\operatorname{sen}x - \cos x}{\operatorname{sen}x + x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-(\operatorname{sen}x+x\cdot\cos x)+\operatorname{sen}x}{\cos x+\cos x - x\cdot\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x - x\cos x}{2\cos x + x\operatorname{sen}x}=\frac{0}{2}=0$$

Indeterminación cero por infinito

La indeterminación cero por infinito, se transforma del siguiente modo:

- $$\lim_{x\to a} A\cdot B=\lim_{x\to a}\frac{A}{\frac{1}{B}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0\cdot(-\infty)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

Indeterminaciones 0^0, ∞^0 y 1^∞

En las indeterminaciones cero elevado cero, infinito elevado a cero y uno elevado a infinito; se realiza en primer lugar las siguientes operaciones:

$$\lim_{x\to a} u^v \qquad A=u^v$$

$$\ln A=\ln u^v \qquad \ln A = v\ln u \qquad A=e^{v\ln u}$$

$$\lim_{x\to a} e^{v\ln u}=e^{\lim_{x\to a}(v\ln u)}$$

Ejemplos

- $$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{1}{x}} = 0^{\frac{1}{\infty}} = 0^0$$

$$A = (2x)^{\frac{1}{x}} \qquad \ln A = \frac{1}{x}\ln(2x) \qquad A = e^{\frac{1}{x}\ln(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(2x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^{\infty}$$

$$A = (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \qquad \ln A = \frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)$$

$$A = e^{\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\frac{-2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-6\operatorname{tg}2x}{2x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-12(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{2}} = e^{-6}$$

- $$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x\right)^{\operatorname{sen} x} = \infty^0$$

$$A = \left(\operatorname{cotg} x\right)^{\operatorname{sen} x} \qquad \ln A = \operatorname{sen} x \ln\left(\operatorname{cotg} x\right)$$

$$A = e^{\operatorname{sen} x \ln\left(\operatorname{cotg} x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x\right)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \ln\left(\operatorname{cotg} x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\operatorname{cotg} x\right)}{\operatorname{cosec} x}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cotg} x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \operatorname{cotg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = e^0 = 1$$

EJERCICIOS DE TEOREMAS DE DERIVABILIDAD:

1 ¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función f(x) = |x − 1| en el intervalo [0, 2]?

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & Si\ x \in [0,1) \\ x-1 & Si\ x \in [1,2] \end{cases}$$

La función es continua en [0, 2].

No es aplicable el **teorema de Rolle** porque la solución no es derivable en el punto x = 1.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & Si\ x \in (0,1) \\ 1 & Si\ x \in [1,2) \end{cases}$$

$f'(1^-) = -1$ $\qquad f'(1^+) = 1$

2 Estudiar si la función f(x) = x − x^3 satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos [−1, 0] y [0, 1]. en caso afirmativo determinar los valores de c.

f(x) es una función continua en los intervalos [−1, 0] y [0, 1] y derivable en los intervalos abiertos (−1, 0) y (0, 1) por ser una función polinómica.

Además se cumple que:

f(−1) = f(0) = f(1) = 0

Por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$f'(c) = 0$ $\qquad 1 - 3c^2 = 0$ $\qquad c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$

3 ¿Satisface la función f(x) = 1 − x las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo [−1, 1]?

La función es continua en el intervalo [−1, 1] y derivable en (−1, 1) por ser una función polinómica.

No cumple **teorema de Rolle** porque $f(-1) \neq f(1)$.

4 Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Si la función tuviera dos raíces distintas x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, tendríamos que:

$f(x_1) = f(x_2) = 0$

Y como la función es continua y derivable por ser una función polinómica, podemos aplicar el **teorema del Rolle**, que diría que existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$ $f'(x) = 2(1 + 3x + 6x^2)$.

Pero $f'(x) \neq 0$, no admite soluciones reales porque el **discrimínante** es negativo:

$\Delta = 9 - 24 < 0$.

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

5 ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 25$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

$f(0) = -25$

$f(2) = 37$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (0, 2).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$

Dado que la derivada no se anula, ya que su **discriminante** es negativo, la función es estrictamente creciente y posee una única raíz.

6 Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo (0, 1).

La función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano.

$f(0) = 1$

$f(1) = -3$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (0, 1).

Teorema de Rolle.

$f'(x) = 6x^2 - 6 \quad 6x^2 - 6 = 0 \quad 6(x - 1)(x + 1) = 0$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = -1$, por tanto no puede haber dos raíces en el intervalo (0, 1).

7 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en [0, 2]?

f(x) es continua en [0, 2] y derivable en (−1, 2) por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{7-1}{2-0} = f'(c) \qquad f'(c) = 3$$

$$8c - 5 = 3 \qquad c = 1$$

8 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 1/x^2$ en [0, 2]?

La función no es continua en [−1, 2] ya que no definida en $x = 0$.

9 En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda.

Los puntos A = (1, 1) y B = (3, 0) pertenecen a la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 0 = 9 + 3b + c \end{cases} \qquad b = -\frac{9}{2} \qquad c = \frac{9}{2}$$

$$y = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$$

Por ser la función polinómica se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3].

$$f'(c) = 2c - \frac{9}{2}$$

$$\frac{9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} - 1 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}}{2} = 2c - \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = 2c - \frac{9}{2} \qquad c = 2 \qquad f(c) = 4 - 9 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

10 Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos A(1, 2) y B(3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{20-2} \qquad 9x - 9 = y - 2 \qquad y = 9x - 7$$

Por ser $y = x^3 - x^2 + 2$ continua en [1, 3] y derivable en (1, 3) se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{20-2}{3-1} = f'(c) \qquad f'(c) = 9$$

$3c^2 - 2c = 9$ $\qquad$ $3c^2 - 2c - 9 = 0$

$c = \dfrac{2+\sqrt{112}}{6} \in (1,3)$ $\qquad$ $c = \dfrac{2-\sqrt{112}}{6} \notin (1,3)$

11 Determinar a y b para que la función

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo [2, 6].

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & Si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & Si\ x\geq 4 \end{cases}$$

En primer lugar se debe cumplir que la función sea continua en [2, 6].

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

$4a - 3 = -16 + 40 - b$ $\qquad$ $a + b = 27$

En segundo lugar se debe cumplir que la función sea derivable en (2, 6).

$$f'(4^-) = f'(4^+)$$

$a = -2\cdot 4 + 10$ $\qquad$ $a = 2$ $\qquad$ $b = 19$

EJERCICIOS DE LIMITES POR L'HOPITAL

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

2

$$\lim_{x\to\infty^{+}}\frac{x}{(\ln x)^{3}+2x}$$

3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

4

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x-1)\sec 2x$$

5

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$$

6

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$$

7

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

8

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x}$$

10

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{arc\,sen} x\ \operatorname{cotg} x)$$

11

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}(1+\operatorname{tg} 2x)^{\frac{4}{x}}\right]$$

12 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}x}$$

13

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-e^{x}}{(\operatorname{arc\,tg}x)^{2}}$$

14 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$$

15

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$$

16 $$\lim_{x\to 0}x^{\operatorname{sen}x}$$