FUNCIONES: CONTINUIDAD. LIMITES. DERIVADAS

$$\text{Dada } f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<3 \\ \dfrac{2x}{x-5} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Representación gráfica

b) Dom(f)=

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m

d) Estudiar su continuidad. En caso de presentar discontinuidades, clasificarlas.

e) Ecuación de las posibles asíntotas horizontales y/o verticales.

Función valor absoluto

a) **TEORIA:** Obtener $\log_4 2$ con la calculadora científica básica. Indicar a continuación la definición de logaritmo, y justificar mediante ésta el resultado anterior.

b) Aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico, calcular:

$$Ln\,\frac{1}{e^2\sqrt{e}} =$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resolver (en caso de tener solución no exacta, no expresarla en forma decimal) y **comprobar** sin calculadora:

$$e^{2x} = e^x + 6$$

Resolución de indeterminaciones

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2} =$

b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$

c) $\lim_{x\to 0^+} \left(Ln\,x - \dfrac{3x+2}{x^2} \right) =$

d) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2-1} \right) =$

Definición de derivada

TEORÍA: Obtener, utilizando la definición (es decir, mediante un límite), la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$

Cálculo de derivadas

Obtener la derivada **simplificada** de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ =

b) $y=\dfrac{3x^4-2x^2+5}{2}$ =

c) $y=\left(3x^2+5\right)^5$

d) $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$

I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 3ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS I	1º Bach. A+B CURSO 2012-2013	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Nombre: ______________________________ ☐ Grupo aula MAT 4 ☐ Grupo aula 2º Bach. C

Se puede utilizar calculadora. No usar bolígrafo rojo. Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4) ☐

Todos los indicadores tienen el mismo peso en la nota final del examen. Nota lenguaje matemático (0 a 4) ☐

Nota limpieza y orden (0 a 4) ☐

Indicador 6.3: Funciones a trozos
Indicador 8.1: Cálculo de límites
Indicador 8.3: Continuidad

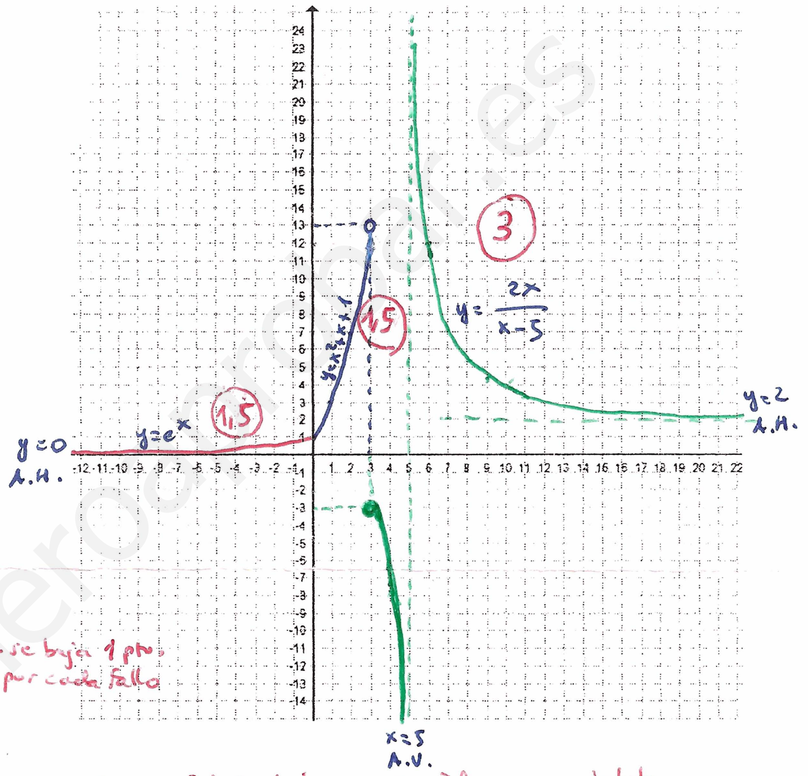
$$\text{Dada } f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ x^2+x+1 & \text{si } 0\le x<3 \\ \dfrac{2x}{x-5} & \text{si } x\ge 3 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Representación gráfica

x	0	1	2	~~3~~
$y=x^2+x+1$	1	3	7	~~13~~

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . . . 1005 . . . ∞
$y=\frac{2x}{x-5}$	-3	-8	~~∄~~	12	7	5,$\hat{3}$	4,5	4	3,$\hat{6}$ . . . 2,01 . . . 2^+

← se baja 1 pto. por cada fallo



Se baja 1 pto: por no señalar una asíntota
por no indicar el nombre de las ramas
por no señalar • ó o en los extremos

b) Dom(f)= $\mathbb{R}-\{5\}$ 1   Im(f)= $(-\infty,-3]\cup(0,\infty)$ 1

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m

$f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,3)$ 1

$f(x)\searrow \forall x\in(3,\infty)-\{5\}$ (No presenta M ni m)

d) Estudiar su continuidad ~~.~~ analíticamente En caso de presentar discontinuidades, clasificarlas.

La 1ª rama es continua (por ser una exponencial simple), al igual que la 2ª rama (por ser polinómica. La 3ª rama no está definida en x = 5, punto que está dentro de su dominio particular de definición. Además, hay que estudiar la continuidad en los posibles puntos de unión de las ramas, es decir, x = 0 y x = 3 : $\boxed{0,5}$

¿CONTINUA en x = 0?

1º) $\exists f(0)=\boxed{1}$ (2ª rama) $\boxed{0,5}$

2º) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x=e^0=1$ $\boxed{0,5}$ $\boxed{0,5}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\boxed{1}$ $\boxed{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x+1)=1$ $\boxed{0,5}$ $\boxed{0,5}$

se baja 0,5 por notación incorrecta

← se baja 0,5 por no indicar el paréntesis

3º) Coinciden lim e imagen $\boxed{0,5}$ $\Longrightarrow$ f(x) continua en x = 0 (lo cual se constata también gráficamente)

¿CONTINUA en $x=3$? $\boxed{0,5}$

1º) $\exists\, f(3)=\frac{6}{-2}=\boxed{-3}$ (3ª rama)

2º) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^2+x+1)=13$ $\boxed{0,5}$

se baja 0,5 por no indicar el paréntesis

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-5}=\frac{6}{-2}=-3$ $\boxed{0,5}$

se baja 0,5 por no haberlo recuadrado

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f(x)$ $\boxed{0,5}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{discontinuidad de salto finito en } x=3}$ (como se observa en la gráfica) $\boxed{1}$

3

¿CONTINUA en $x=5$?

1º) $\nexists\, F(5)=\frac{10}{0}$ $\boxed{0,5}$

2º) $\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2x}{x-5}\overset{10/0}{=}\begin{cases}\lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{10}{0^-}=-\infty & \boxed{0,5}\\ \lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{10}{0^+}=\infty & \boxed{0,5}\end{cases}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 5} f(x)$ $\boxed{0,5}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{discontinuidad asintótica en } x=5}$ $\boxed{1}$

(Como se observa en la gráfica)

4

Soluc: $\boxed{f(x) \text{ CONTINUA } \forall x\in\mathbb{R}-\{3,5\}}$ $\boxed{0,5}$

e) Ecuación de las posibles asíntotas horizontales y/o verticales. $x=5$ A.V.; $y=0$ A.H. $y=2$ A.H.

0,3 0,3 0,4

NOTA del indicador 6.3 (0 a 10) $\boxed{6+4}$

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la representación gráfica de la función a trozos) ☐

+ b y c

NOTA del indicador 8.1 (0 a 10) $\boxed{3+3+4}$

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo calcular límites laterales) ☐

se admite 1 fallo

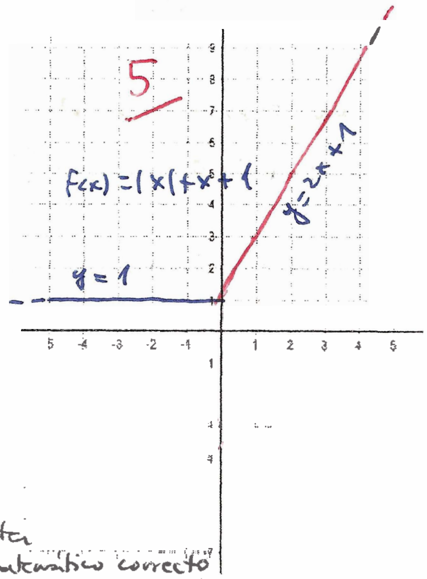
NOTA del indicador 8.3 (0 a 10) ☐

¿Alcanza el mínimo? (No es mínimo clasificar las discontinuidades) ☐

Indicador 6.4: Función valor absoluto

Dada $f(x)=|x|+x+1$ representarla gráficamente y expresarla como función definida a trozos.

se anula en $x=0$



$f(x)=|x|+x+1=\begin{cases}-x+x+1 & \text{si } x\le 0\\ x+x+1 & \text{si } x>0\end{cases}=\boxed{\begin{cases}1 & \text{si } x\le 0\\ 2x+1 & \text{si } x>0\end{cases}}$

2

3

x	~~0~~	1
$y=2x+1$	~~1~~	3

NOTA: Se baja 1 pto por no indicar el nombre de cada rama
" " " " " dar más de 2 valores para la recta
Se baja hasta 2 ptos. por no expresar la solución con lenguaje matemático correcto

NOTA del indicador 6.4 (0 a 10) $\boxed{5+5}$

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la representación gráfica) ☐

Indicador 7.1: Definición de logaritmo

Indicador 7.2: Cálculo logarítmico

a) **TEORÍA:** Obtener razonadamente $\log_4 2$ con la calculadora científica básica. Indicar a continuación la definición de logaritmo, y justificar mediante ésta el resultado anterior.

1º: $\log_4 2 = \frac{\log 2}{\log 4} = \frac{0{,}3010\ldots}{0{,}6020\ldots} = \frac{1}{2}$ (Fórmula del cambio de base) 3/ 1/ TOTAL: $\boxed{4}$

2º: "El logaritmo en base a de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número":

TOTAL: $\boxed{3}$ $\log_a N = x \iff a^x = N$ donde $a>0$ y $a\neq 1$

3º: P.ej. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ porque $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$ TOTAL: $\boxed{3}$

b) Aplicando las fórmulas del cálculo logarítmico, calcular:

$Ln\frac{1}{e^2\sqrt{e}} = \cancel{Ln}\, 1 - Ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = -(Ln e^2 + Ln\sqrt{e}) =$ ← se baja 1 pto. por cada paréntesis no indicado

0 2/

$= -(2\,\cancel{Ln} e + \frac{1}{2}\,\cancel{Ln} e) = -2 - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$

2/ 2/ 2/

NOTA del indicador 7.1 (0 a 10) $\boxed{4+3+3}$

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la definición y su aplicación) ☐

NOTA del indicador 7.2 (0 a 10) $\boxed{10}$

¿Alcanza el mínimo? (Apdo. b) ☐

Indicador 7.3: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resolver (en caso de tener solución no exacta, no ~~es necesario~~ expresarla en forma decimal) y **comprobar** sin calculadora:

$e^{2x} = e^x + 6$; $(e^x)^2 = e^x + 6$; cambio de variable $e^x = t \Rightarrow t^2 = t + 6$ 1/

$t^2 - t - 6 = 0$ ↗ $t = -2 = e^x$ ∄ solución. pq. $e^x > 0$ 1/

1 ↘ $t = 3 = e^x \Rightarrow Ln 3 = Ln e^x$ 1/

3/ $\boxed{Ln 3 = x}$ ← se baja 1 pto. si no se recuadra claramente la solución

Comprobación: $e^{2Ln 3} \overset{?}{=} \cancel{e}^{Ln 3} + 6$

$(\cancel{e}^{Ln 3})^2 \overset{?}{=} 3 + 6$ 3/

$3^2 = 3 + 6$ o.k.

NOTA del indicador 7.3 (0 a 10) $\boxed{7+3}$

¿Alcanza el mínimo? (~~Todo es mínimo~~) ☐ Es mínimo la resolución, no la comprobación

Indicador 8.2: Resolución de indeterminaciones

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2} \overset{0/0}{=}_{\text{Ruffini}} \lim_{x\to -2} \frac{(\cancel{x+2})(x^2+x+1)}{x^2(\cancel{x+2})} = \boxed{\frac{3}{4}}$ TOTAL: $\boxed{3}$

1/ 2/

	1	3	3	2
-2		-2	-2	-2
	1	1	1	$\boxed{0}$

NOTA: se baja 1 pto. si se factoriza el denominador por Ruffini
" " " " si se omite el símbolo $\lim_{x\to -2}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2} \underset{\text{indeterminado}}{\overset{-\infty/-\infty}{\approx}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \boxed{1}$ TOTAL: $\boxed{1}$

se baja 1 pto. si falta este paso

c) $\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \frac{3x+2}{x^2}\right) = \ln 0^+ - \frac{2}{0^+} = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}$ TOTAL: $\boxed{2}$

si falta este paréntesis

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-1}\right) \underset{\text{indeterminado}}{\overset{\infty-\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-1}}$ 0,5/ $= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+4x-(\cancel{x^2}-1)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-1}}$ 0,5/ $=$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2-1}} \underset{\text{indeterminado}}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4+\cancel{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\cancel{\frac{4}{x}}}+\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$ 1/

0,5/ 0,5/ 1/ TOTAL: $\boxed{4}$

se baja 1 pto. por cambiar este signo

NOTA del indicador 8.2 (0 a 10) $\boxed{3+1+2+4}$

¿Alcanza el mínimo? (Apdos. a y b) ☐

Indicador 9.1: Definición de derivada

TEORÍA: Obtener, utilizando la definición (es decir, mediante un límite), la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$

1/ 1/ 1/

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \underset{\text{indeterminado}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ (c.q.d.)

1/ 1/ 5/

NOTA del indicador 9.1 (0 a 10) $\boxed{10}$

¿Alcanza el mínimo? (Es mínimo la fórmula) ☐

Indicador 9.2: Cálculo de derivadas

Obtener la derivada **simplificada** de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{1/2}} = x^{3/2} \xrightarrow{x^n} y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$ 2,5/

NOTA: se baja 1 pto. si se deriva como U/V, aunque esté bien

b) $y=\frac{3x^4-2x^2+5}{2} = \frac{1}{2}(3x^4-2x^2+5) \xrightarrow{k\cdot u} y' = \frac{1}{2}(12x^3-4x) = \boxed{6x^3-2x}$ 2,5/

1,5/

c) $y=(3x^2+5)^5 \xrightarrow{u^n} y' = 5(3x^2+5)^4\cdot 6x = \boxed{30x(3x^2+5)^4}$ 1/

d) $y=\frac{2x}{x^2+x+1} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{2(x^2+x+1)-2x\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+\cancel{2x}+2-4x^2-\cancel{2x}}{(x^2+x+1)^2} = \boxed{\frac{-2x^2+2}{(x^2+x+1)^2}}$ 1/

1/ 0,5/

NOTA: se baja 1 pto. en cualquiera de las derivadas si se omite algún paso previo fundamental

NOTA del indicador 9.2 (0 a 10) $\boxed{2,5}$ cada apdo.

¿Alcanza el mínimo? (Todo es mínimo; se admite un fallo) ☐