DERIVADAS

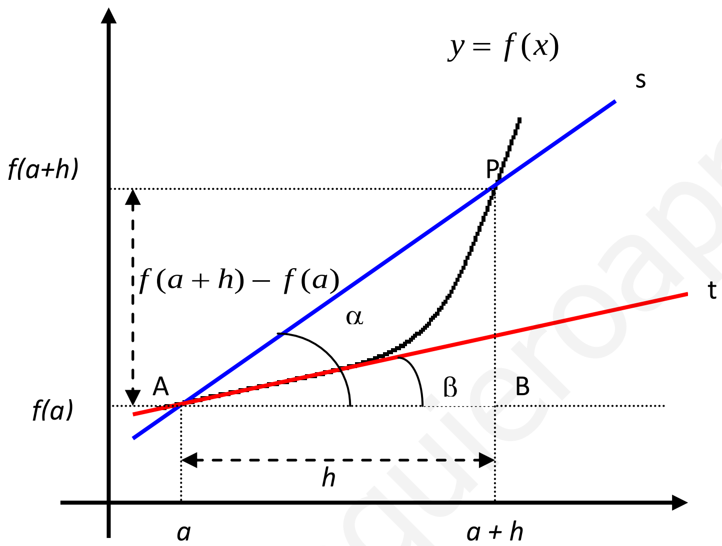
Definición de derivada.

La derivada de una función f en el punto de abscisa x = a, se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A la derivada de una función en un punto se le llama también tasa de variación instantánea.

Interpretación geométrica de la derivada



La recta secante **s**, corta a la curva $y = f(x)$, en los puntos A y P.

Su pendiente es: $tg\alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si el punto P se va acercando al punto A, hasta confundirse con él, la recta secante s, se transforma en la recta tangente t y el ángulo α se transforma en el ángulo β, es decir,

Cuando $P \to A$, que es equivalente a decir que $h \to 0$, el límite de la recta secante s, es la recta tangente t

Pero cuando $\alpha \to \beta, tg\alpha \to tg\beta$ que es equivalente a $\lim_{h \to 0} tg\alpha = tg\beta$

Por tanto, $tg\beta = \text{pendiente de t} = \lim_{h \to 0} tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Queda probado que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Derivadas laterales.

Las definimos por las siguientes fórmulas:

Derivada por la derecha: $f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Derivada por la izquierda: $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Para que una función sea derivable en un punto tienen que existir las derivadas laterales y estas ser iguales.

Ejemplo 1:

Halla la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto $x = 3$

Podemos seguir los siguientes pasos:

1º. $f(3) = \dfrac{2}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;

2º. $f(3+h) = \dfrac{2}{3+h+1} = \dfrac{2}{4+h}$

3º. $f(3+h) - f(3) = \dfrac{2}{4+h} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4 - 1.(4+h)}{2(4+h)} = \dfrac{-h}{2(4+h)}$

4º. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{-h}{2(4+h)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{2h(4+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{2(4+h)} = \dfrac{-1}{8}$

Ejemplo 2:

Dada la función $f(x) = x^2$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x = 2.

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada:

$$m = f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$$

Las coordenadas del punto son:

Para *x = 2, f(2) = 4* luego *P(2, 4)*

Aplicando la fórmula de la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 4(x - 2)$$

Función derivada.

La derivada de una función en un punto de abscisa x = a, asigna a dicho punto un número real, que es el valor de la derivada en dicho punto.

También podemos considerar una función que asocie a cada punto x, el valor de la derivada en ese punto. Recibe el nombre de función derivada o simplemente derivada.

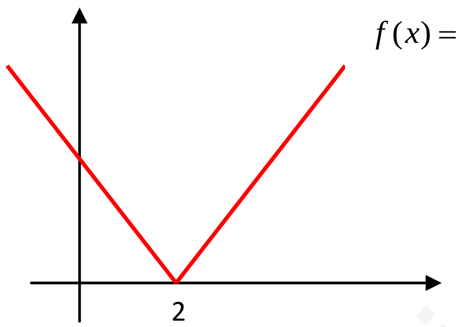
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivación y continuidad.

Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto. Si la función es continua no tiene por qué ser derivable.

Ejemplo 3

$$f(x) = |x-2|$$



Veamos que esta función es continua en x = 2:

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ si } x-2 \geq 0, \text{ es decir, si } x \geq 2 \\ -x+2 \text{ si } x-2 < 0, \text{ es decir, si } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x+2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0$$

Los límites laterales son iguales. Y como $f(2) = 2-2 = 0$, la función es continua en $x = 2$

Sin embargo no es derivable en dicho punto como vamos a ver:

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(2+h)+2-0}{h} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)-2-0}{h} = 1$$

Nota: Como la función es continua $f'(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \geq 2 \\ -1 & si \;\; x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1 \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 1 = 1 \end{array}$

Existen las derivadas laterales pero como no son iguales, la función no es derivable en el punto *x = 2.*

www.yoquieroaprobar.es

Derivadas de operaciones con funciones.

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes fórmulas:

Derivada de una suma o diferencia: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

Derivada de un producto: $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo 4:

Sean las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = 4x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

es decir,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} = 4$$

Si sumamos las funciones y hallamos la derivada de la suma, resulta:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

es decir,

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) - x^2 - 4x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 4) = 2x + 4$$

resultado que es la suma de las derivadas de las funciones por separado.

Derivada de una función compuesta: Regla de la cadena.

Sea la función compuesta $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\frac{g[f(x+h)]-g[f(x)]}{h}=\frac{g[f(x+h)]-g[f(x)]}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{f(x+h)-f(x)\to 0}\frac{g[f(x+h)]-g[f(x)]}{f(x+h)-f(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g'[f(x)].f'(x)$$

es decir, la derivada de la composición de f y g es el producto de la derivada de g en el punto $f(x)$ multiplicada por la derivada de f en el punto x.

$$(g\circ f)'(x)=g'[f(x)].f'(x)$$

Cálculo de derivadas.

Aplicando la definición, a través del límite, y teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtienen las derivadas de las siguientes funciones:

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Constante	y = k	y'=0
Identidad	y =x	y'=1
Tipo potencial	$y=x^a$	$y'=a\cdot x^{a-1}$
	$y=\left[f(x)\right]^a=f^a(x)$	$y'=a\cdot f^{a-1}(x).f'(x)$

Ejemplos:

- $y=x^4;\quad y'=4x^3$
- $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2};\quad y=\dfrac{x^{1/2}}{x^2}=x^{1/2}.x^{-2}=x^{-3/2}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}};$

  $$y'=\frac{-3}{2}.x^{\frac{-3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2}.\frac{1}{x^{5/2}}=-\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^5}}=-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$
- $y=(3x^2-2)^5;\quad y'=5(3x^2-2)^4.(3x^2-2)'=30x(3x^2-2)$
- $y=\sqrt[3]{x^2-3};\quad y=(x^2-3)^{1/3};$

  $$y'=\frac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2-3)'=\frac{1}{3}(x^2-3)^{-2/3}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$$
- $y=\dfrac{1}{(2x+5)^2};\quad y=(2x+5)^{-2};$

  $$y'=-2(2x+5)^{-3}.(2x+5)'=-2(2x+5)^{-3}.2=\frac{-4}{(2x+5)^3}$$

www.yoquieroaprobar.es

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo raíz cuadrada	$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Ejemplo:

- $y=\sqrt{x^2-3x}$; $y'=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo exponencial	$y=e^x$	$y'=e^x$
	$y=e^{f(x)}$	$y=e^{f(x)}.f'(x)$
	$y=a^x$	$y=a^x.\ln a$
	$y=a^{f(x)}$	$y=a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$

Ejemplos:

- $y=e^{-x}$; $y'=e^{-x}.(-1)=-e^{-x}$
- $y=e^{3x+2}$; $y'=e^{3x+2}.(3x+2)'=e^{3x+2}.3=3e^{3x+2}$
- $y=2^x$; $y'=2^{2x}.\ln 2$
- $y=5^{x^2+1}$; $y'=5^{x^2+1}.(x^2+1)'.\ln 5=2x.5^{x^2+1}.\ln 5$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo logarítmico	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}.\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$
	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\dfrac{1}{\ln a}$

Ejemplos:

- $y=\ln(2x^3+5x)$; $y'=\dfrac{(2x^3+5x)'}{2x^3+5x}=\dfrac{6x^2+5}{2x^3+5x}$
- $y=\log_2 x$; $y'=\dfrac{1}{x}.\log_2 e$
- $y=\log_3(4x+1)$; $y'=\dfrac{(4x+1)'}{4x+1}.\log_3 e=\dfrac{4}{4x+1}.\log_3 e=\dfrac{4.\log_3 e}{(4x+1)}$

www.yoquieroaprobar.es

<table>
<tr><th>TIPO</th><th>FUNCIÓN</th><th>DERIVADA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo seno</td><td>$y = senx$</td><td>$y' = \cos x$</td></tr>
<tr><td>$y = senf(x)$</td><td>$y' = \cos f(x).f'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplos:
• $y = sen(4x-1)$; $y' = \cos(4x-1).(4x-1)' = 4\cos(4x-1)$
• $y = sen^3 x$; $y = (sen\, x)^3$; $y' = 3(sen\, x)^2.(sen\, x)' = 3sen^2 x.\cos x$
• $y = sen\, x^2$; $y' = \cos x^2.(x^2)' = 2x\cos x^2$
• $y = sen^2(2x^3+2x)$; $y = [sen(2x^3+2x)]^2$;
$y' = 2sen(2x^3+2x).[sen(2x^3+2x)]' = 2sen(2x^3+2x).\cos(2x^3+2x).(6x^2+2)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TIPO</th><th>FUNCIÓN</th><th>DERIVADA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo coseno</td><td>$y = \cos x$</td><td>$y' = -senx$</td></tr>
<tr><td>$y = \cos f(x)$</td><td>$y' = -senf(x).f'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplos:
• $y = \cos 5x$; $y' = sen5x.(5x)' = -5sen5x$
• $y = \cos\sqrt{x}$; $y' = -sen\sqrt{x}.(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}sen\sqrt{x} = -\frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TIPO</th><th>FUNCIÓN</th><th>DERIVADA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo tangente</td><td>$y = tgx$</td><td>$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$</td></tr>
<tr><td>$y = tgf(x)$</td><td>$y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.f'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplos:
• $y = tg5x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 5x}.(5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}$
• $y = tg^2 x$; $y = (tg\, x)^2$; $y' = 2tg\, x.(tg\, x)' = 2tg\, x.\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2tg\, x}{\cos^2 x}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>TIPO</th><th>FUNCIÓN</th><th>DERIVADA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo cotangente</td><td>$y = ctgx$</td><td>$y' = \frac{-1}{sen^2 x}$</td></tr>
<tr><td>$y = ctgf(x)$</td><td>$y' = \frac{-1}{sen^2 f(x)}.f'(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplos:
• $y = ctg\, x^2$; $y' = \frac{-1}{sen^2 x^2}.(x^2)' = \frac{-2x}{sen^2 x^2}$
• $y = ctg\, e^x$; $y' = \frac{-1}{sen^2 e^x}.(e^x)' = \frac{-e^x}{sen^2 e^x}$</td></tr>
</table>

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Funciones arco	$y = arcsenx$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = arcsenf(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}.f'(x)$
	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}}.f'(x)$
	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
	$y = arctgf(x)$	$y' = \frac{1}{1+f^2(x)}.f'(x)$

Ejemplos:

- $y = arcsen\,x^2\,;\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}.(x^2)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
- $y = arctg(e^x)\,;\quad y' = \frac{1}{1+(e^x)^2}.(e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$
- $y = arc\cos 5x\,;\quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1+(5x)^2}}.(5x)' = \frac{-5}{\sqrt{1+25x^2}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo exponencial potencial	$y = f(x)^{g(x)}$	1- Tomar ln y operar 2- Derivar 3- Despejar la derivada

Ejemplo:

- $y = x^x$

Sería un error derivar como si fuese una función potencial.

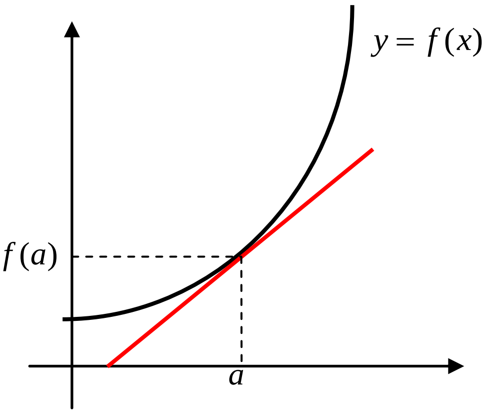
1- Tomando logaritmos, $\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

2- Derivando los dos miembros, $\frac{y'}{y} = 1.\ln x + \frac{1}{x}.x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1$

3- Despejando la derivada, $y' = y(\ln x + 1)$

Y como $y = x^x$ se obtiene finalmente $y' = x^x(\ln x + 1)$

Ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.



Para halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a$, procedemos de la forma siguiente:

- Hallamos el valor de la función en dicho punto, *f(a)* con lo que obtenemos el punto por donde pasa la recta tangente: $(a, f(a))$
- Calculamos la pendiente de la recta que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(a)$
- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto – pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ejemplo 5:

Ecuación de recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x + 1$, en el punto de abscisa x = 4

- Para x = 4, $f(4) = 4^2 - 3.4 + 1 = 5$. La recta pasa por el punto $(4,5)$
- $f'(x) = 2x - 3;\ \ m = f'(4) = 2.4 - 3 = 5$
- $y - y_0 = m(x - x_0)$, por tanto, $y - 5 = m(x - 4)$ es la recta buscada.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios resueltos

1.- Deriva las siguientes funciones:

a) $y = x^3(2x-1)^5$; b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$; c) $y = \dfrac{2}{x^3 + x}$

Solución:

a) $y = x^3(2x-1)^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2(2x-1)^5 + 5(2x-1)^4.2.x^3 = 3x^2(2x-1)^5 + 10x^3(2x-1)^4$

b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

c) $y = \dfrac{2}{x^3+x} = 2(x^3+x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = -2(x^3+x)^{-2}(3x^2+1) = \dfrac{-2(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

2.- Halla las derivadas de las funciones siguientes:

$f(x) = \ln(4x+1)$, $g(x) = \cos(3x+1)^2$ y $h(x) = senx \cos 2x$

Solución:

$f(x) = \ln(4x+1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{4}{4x+1}$

$g(x) = \cos(3x+1)^2$

$g'(x) = -sen(3x+1)^2.[(3x+1)^2]' = -sen(3x+1)^2.2(3x+1).3 = -6(3x+1)sen(3x+1)^2$

$h(x) = senx \cos 2x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \cos x \cos 2x + (-sen2x.2)senx = \cos x \cos 2x - 2sen2xsenx$

3.- Demuestra, aplicando la definición, que la derivada de una constante es 0.

Solución:

Sea la función constante $f(x) = k$

Como la función es constante, $f(x+h) = k$

Entonces, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h\to o} 0 = 0$

www.yoquieroaprobar.es

4.- Aplicando logaritmos, halla la derivada de la función $y = sen(x)^{x+1}$

Solución:

Sería un error derivar como si fuese una función potencial. Estamos en el caso de derivadas del tipo $y = f^{g}$ que se resuelven aplicando logaritmos neperianos y derivando los dos miembros de la expresión resultante, es decir,

$y = sen(x)^{x+1}$

1- Aplicando logaritmos, $\ln y = \ln sen(x)^{x+1} \Rightarrow \ln y = (x+1).\ln sen(x)$

2- Derivando los dos miembros, $\dfrac{y'}{y} = 1.\ln sen(x) + (x+1).\dfrac{\cos(x)}{sen(x)} \Rightarrow$

$\dfrac{y'}{y} = \ln sen(x) + (x+1).\cot g(x)$

3- Despejando la derivada, $y' = y.\left[\ln sen(x) + (x+1).\cot g(x)\right]$

Y como $y = sen(x)^{x+1}$ se obtiene $y' = sen(x)^{x+1}.\left[\ln sen(x) + (x+1).\cot g(x)\right]$

5.- Halla la derivada de la función $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

Solución:

Desarrollamos la expresión logarítmica: $y = \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)$

Y ahora derivamos;

$$y' = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

6.- Deriva y simplifica: $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

Solución:

$$y' = \frac{2.(x+1)^2 - 2(x+1).2x}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[2(x+1)-4x]}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)-4x}{(x+1)^3} = \frac{2-2x}{(x+1)^3}$$

7.- Deriva y simplifica: $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Solución:

$$y'=\frac{(e^x+e^{-x})'.(e^x-e^{-x})-(e^x-e^{-x})'.(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

Realizando las operaciones del numerador

$$y'=\frac{e^{2x}-1-1+e^{-2x}-(e^{2x}+1+1+e^{-2x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

8.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases}1 & si \quad \mathrm{x}\leq 0\\ \mathrm{x}+1 & si \quad 0<x\leq 2\\ 2x-1 & si \quad x>2\end{cases}$

Estudia si es derivable en los puntos *x = 0* y *x = 2*

Solución:

Estudio de la continuidad en x=0

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-}1=1 \qquad f(0)=1 \quad \Rightarrow \quad f(x)\ \ continua\ \ en\ \ x=0$

Estudio de la derivabilidad $f'(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ 1 & si \quad 0<x\leq 2\\ 2 & si \quad \mathrm{x}>2\end{cases}$

Punto x = 0: $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0$ $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales luego la función no es derivable en dicho punto.

Punto *x = 2:* $f'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-}1=1$ $f'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+}2=2$

Ocurre lo mismo, existen las derivadas laterales pero no son iguales. La función no es derivable en *x = 2*.

www.yoquieroaprobar.es

9.- Deriva y simplifica la función $y=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Solución:

Antes de derivar desarrollamos el logaritmo:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)$$

Y ahora derivamos:

$$y'=\frac{1}{2}.\frac{-senx}{1+\cos x}-\frac{1}{2}.\frac{senx}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{-senx}{1+\cos x}-\frac{senx}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}.\frac{-senx+sen.\cos x-senx-senx\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

es decir, $y'=\frac{1}{2}.\frac{-2senx}{1-\cos^2 x}=\frac{-senx}{sen^2 x}=-\frac{1}{senx}$

10.- Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2+x+1$ en el punto de abscisa x = 2. Escribe la ecuación de dicha recta.

Solución:

La pendiente es el valor de la derivada: $f'(x)=2x+1$

Pendiente: $m=f'(2)=2.2+1=5$

Ecuación de la recta: $y-y_0=m(x-x_0)$

Necesitamos las coordenadas del punto: Para $x=2$, $f(2)=2^2+2+1=7$;*P(2, 7)*

La ecuación de la recta es, por tanto, $y-7=5(x-2)$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios propuestos

1.- Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$; b) $g(x)=\dfrac{3}{(x-5)^2}$: c) $h(x)=5^{3x^2+2x-1}$

2.- Deriva y simplifica: $y=\dfrac{2x+3}{(x+5)^2}$

3.- Deriva las siguientes funciones logarítmicas:

$y=\ln(2x^2-3x+1)$; $y=\ln\sqrt{2x-3}$; $y=\log_2(x^2-5x+6)$

4.- Deriva y simplifica: $y=\ln\dfrac{1+senx}{1-senx}$

5.- Calcula:

a) Derivada de $f(x)=x^4+4x-1$ en el punto de abscisa *x = 1*

b) Derivada de $f(x)=\ln(x+3)$ en *x = 2*

c) Derivada de $f(x)=\cos(5x+4)$ en $x = \pi$

6.- ¿Qué valores han de tener *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & si\ \ x\le 2 \\ ax^2+b & si\ \ x>2 \end{cases}$ sea derivable en *x = 2?*

7.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=3sen2x$ en el punto de abscisa *x= 0.*

8.- Deriva la función $y=\sqrt[3]{(5x-3)^2}$

9.- El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t)=3t^2-t+1$donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante *t = 2* segundos.

10.- Utilizando la definición de derivada, demuestra que la derivada de $y=ax$ es *a*.

11.- Di si la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ \mathrm{x}\le 1 \\ \mathrm{2x - 2} & si\ \ x>1 \end{cases}$ es derivable en *x = 1*.

12.- Deriva y simplifica:

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $y=L\dfrac{a+x}{a-x}$; $y=\dfrac{senx}{1+\cos x}$; $y=arc\ sen\ mx$; $y=arc\cos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

www.yoquieroaprobar.es