Método de derivación logarítmica

Se imagina derivar una función como

$$y = \frac{(2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}}{4\sqrt{3x-1}}$$

Esta función puede ser vista como un cociente de funciones complicadas, en que el numerador es un producto. Cuando se tiene una función que es producto, cociente, potencia o radical de funciones complicadas, se suele emplear la técnica de derivación logarítmica. También se emplea en funciones del tipo función elevada a función, en que la variable está tanto en la base como el exponente.

El método se basa en los siguientes pasos:
1) Tomar logaritmos a ambos miembros, antes de derivar
2) Aplicar propiedades de los logaritmos.
3) Derivar implícitamente.
4) Despejar la derivada.
5) Sustituir y por su definición

Derivadas de funciones complicadas que aparecen productos, cocientes o potencias combinadas

Ejemplo resuelto por pasos
Encuentrar dy/dx siguiendo los pasos de derivación logarítmica.

$$y = x^4(x-1)^2\sqrt{x+1}$$

Solución

Tome logaritmos a ambos miembros.

$$\ln(y) = \ln\left(x^4(x-1)^2\sqrt{x+1}\right)$$

Aplique propiedades de los logaritmos en el lado derecho hasta que ningún logaritmo sea un producto, cociente o potencia. Ver

$$\ln(y) = \ln\left(x^4\right) + \ln\left((x-1)^2\right) + \ln\left((x+1)^{1/2}\right)$$

Falta aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia

$$\ln(y) = 4\ln(x) + 2\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Derive implícitamente.

$$\frac{1}{y}y' = 4\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

Despeje y'.

$$y' = y\left(\frac{4}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)}\right)$$

Sustituya y por su definición.

$$y' = x^4(x-1)^2\sqrt{x+1}\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2(x+1)}\right)$$

Puede o no distribuir y simplificar.

Comentario En el resultado de la derivada aparece muchas veces una suma fraccionaria, estas sumas no se suelen ejecutar.

Hallar la derivada de

$$y = \frac{(2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}}{4\sqrt{3x-1}}$$

Solución Tenemos un cociente, el numerador un producto.
Usamos derivación logarítmica, pues es conveniente en este caso

P1 Tomar logaritmos a ambos miembros

$$\ln y = \ln\left(\frac{(2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}}{4(3x-1)^{1/2}}\right)$$

Aprovechamos para escribir el radical como una potencia

P2 Aplicar propiedades de los logaritmos hasta que ningún argumento sea producto, cociente o potencia.

$$\ln y = \ln\left(\frac{(2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}}{4(3x-1)^{1/2}}\right)$$

Logaritmo de un cociente $\ln\left(-\right)$
Es la diferencia de los logaritmos $\ln(\quad)-\ln(\quad)$

$$= \ln\left((2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}\right) - \ln\left(4(3x-1)^{1/2}\right)$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo de un producto en ambos términos

$$= \ln(2x+1) + \ln(2-3x)^2 + \ln(e^{4x}) - \left(\ln 4 + \ln(3x-1)^{1/2}\right)$$

$$= \ln(2x+1) + \ln(2-3x)^2 + \ln(e^{4x}) - \ln 4 - \ln(3x-1)^{1/2}$$

Se puede derivar sin aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia, pero es preferible aplicar la propiedad para que las derivadas queden más sencillas.

$$\ln y = \ln(2x+1) + 2\ln(2-3x) + 4x\ \ln(e) - \ln 4 - \frac{1}{2}\ln(3x-1)$$

Finalmente, como $\ln e = 1$, se tiene que

$$\ln y = \ln(2x+1) + 2\ln(2-3x) + 4x - \ln 4 - \frac{1}{2}\ln(3x-1)$$

P3 Derivar implícitamente

$\ln(4)$ es una constante, su derivada es 0

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2x+1}\cdot 2 + \frac{1}{2-3x}\cdot(-3) + 4 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x-1}\cdot 3$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{2-3x} + 4 - \frac{3}{2(3x-1)}$$

Multiplicar

La resta se deja indicada

P4 Despeja y'

$$y' = y\left(\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{2-3x} + 4 + \frac{3}{2(3x-1)}\right)$$

P5 Sustituir y

$$y' = \frac{(2x+1)(2-3x)^2 e^{4x}}{4\sqrt{3x-1}}\left(\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{2-3x} + 4 + \frac{3}{2(3x-1)}\right)$$

Ejemplo Para cada una de las siguiente funciones, encontrar dy/dx. Use la regla de la potencia o de la exponencial combinada con la regla de la cadena en caso que se pueda.

$a)$ $y = (x+1)^{\pi-1}$;

$b)$ $y = (2x)^{x/2}$;

$c)$ $y = (\sqrt{2})^{x^2}$

a) $y = (x+1)^{\pi-1}$
El exponente es una constante, se puede usar la regla de la cadena con función externa una potencia, potencia generalizada

$$y' = (\pi-1)(x+1)^{\pi-2}$$

a) $y = (2x)^{x/2}$
Tanto en la base como en el exponente está la variable. La derivación logarítmica es uno de los métodos recomendados.
P1 Tomar logaritmos a ambos miembros

$$\ln y = \ln\left((2x)^{x/2}\right)$$

P2 Desarrollar los logaritmos

$$\ln y = \frac{x}{2}\ln(2x)$$

Podemos dejarlo hasta aquí, pero también podemos seguir, aplicando la propiedad del logaritmo de un producto.

$$\ln y = \frac{x}{2}(\ln 2 + \ln x)$$

P3 Derivar implícitamente

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x) + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En el lado derecho se uso la regla del producto.
Simplificando queda

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x + 1)$$

P4 Despejar y'

$$y' = y\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln x + 1)\right)$$

P5 Sustituir y

$$y' = \frac{(2x)^{x/2}}{2}(\ln 2 + \ln x + 1)$$

c) $y = (\sqrt{2})^{x^2}$
La base es una constante, es preferible derivar usando la derivada de la función exponencial compuesta con función. Como la base es distinta del número e aparece el factor logaritmo neperiano de la base.

$$(a^u)' = a^u u' \ln(a)$$

Al aplicar la fórmula obtenemos

$$y' = (\sqrt{2})^{x^2} \cdot (2x) \cdot \ln(\sqrt{2})$$