EJERCICIOS DE CINEMÁTICA

1º. La velocidad de un móvil que sigue una trayectoria rectilínea viene dada por la ecuación: **v(t)** = (t^2-8t)**j** , en unidades del S.I.. Calcular: a) La aceleración media entre los instantes t = 2 s y t = 4 s. ; b) La aceleración instantánea en t = 3 s. y c) Las componentes intrínsecas de la aceleración en cualquier instante.

SOLUCIÓN

a) Para hallar la aceleración media entre los instantes t = 2 y t = 4, necesitamos conocer la velocidad en cada instante. Se sustituye en la expresión de la velocidad el valor de t:

$v(4) = 4^2 - 8\cdot 4 \rightarrow v(4) = -16\ m\cdot s^{-1}$; $v(2) = 2^2 - 8\cdot 2 \rightarrow v(2) = 12\ m\cdot s^{-1}$;

$$\vec{a}_M = \frac{16\,\vec{j} - 12\,\vec{j}}{4-2} \rightarrow \mathbf{\vec{a}_M = -2\,\vec{j}}$$

b) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t) = (\,2\cdot t - 8)\vec{j}\ \ m\cdot s^{-2}$. Sustituyo t por 3

$$\vec{a}(3) = (2\cdot 3 - 8)\,\vec{j} \rightarrow \mathbf{\vec{a}(3) = -2\,\vec{j}\,m\cdot s^{-2}}$$

c) $\vec{a}_{tg} = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(t^2 - 8t)^2} \rightarrow |\vec{v}| = t^2 - 8t \rightarrow \mathbf{\vec{a}_{tg} = (\,2\cdot t - 8)\vec{j}\ \ m\cdot s^{-2}}$

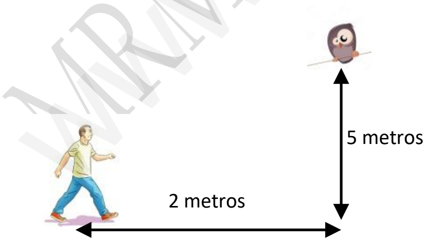
Al ser la aceleración tangencial igual a la aceleración total, **la aceleración normal es nula**, lo cual es lógico ya que es un movimiento en 1 dirección, por lo que no hay variación en la dirección del mismo.

2º. Un pájaro parado en un cable a 5 metros sobre el suelo deja caer un excremento libremente. Dos metros por delante de la vertical del pájaro, y en sentido hacia ella, va por la calle una persona a 5 Km/h. La persona mide 1,70 m. Calcula:

a) si le cae en la cabeza y

b) a qué velocidad debería ir para que le cayera encima.

SOLUCIÓN



$$v = 5\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\ s}\cdot\frac{1000\ m}{1\,\cancel{km}} \rightarrow v = 1'39\ m\cdot s^{-1}$$

tiempo que tarda en caer el excremento al suelo: y = 0

$0 = 5 + 0\cdot t - ½\cdot 9'8\cdot t^2 \rightarrow t = 1'01$ segundos. Hallo la posición del hombre: $x = 0 + 1'39\cdot 1'01 \rightarrow$ **x = 1'4 metros.**

Por lo tanto, no le cae en la cabeza.

b) Para que le caiga en la cabeza, deben coincidir ambos en el mismo instante y punto. El excremento llega al punto y = 1'7 en:

$$1'7 = 5 - \frac{9'8}{2}\cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{6'6}{9'8}} \rightarrow t = 0'821\ s$$

El hombre debe recorrer en ese tiempo 2 metros, por lo que su velocidad será:

$2 = v\cdot 0'821 \rightarrow v =$ **2'44 m·s⁻¹**

3º. La fórmula que da la posición de una partícula que se mueve en trayectoria recta, escrita en sistema internacional es **x = 7t³ -2t² +3t -1**. Calcular:

a) ecuación de la velocidad.
b) Ecuación de la aceleración.
c) Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.

SOLUCIÓN

a) $v = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow v = 21 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 3\ m/s$

b) $a = \dfrac{dv}{dt} \rightarrow a = 42 \cdot t - 4\ m/s^2$

c) Habrá que hallar las posiciones de la partícula en los instantes $t = 2$ y $t = 3$ segundos.

$x(3) = 7{\cdot}3^3 - 2{\cdot}3^2 + 3{\cdot}3 - 1 \rightarrow x(3) = 215$ m; $x(2) = 7{\cdot}2^3 - 2{\cdot}2^2 + 3{\cdot}2 - 1 \rightarrow x(2) = 53$ m

espacio = 215 – 53 → **espacio = 162 metros**

4º. Una partícula describe una trayectoria cuya ecuación en el SI viene dada por $\vec{r} = (t^2 + t + 1)\vec{i} - (3t^3 + 2t^2)\vec{j}$. Calcular:

a) El vector velocidad en cualquier instante.
b) El vector aceleración en cualquier instante.
c) El vector velocidad media en el tercer segundo.
d) El vector aceleración media en el tercer segundo.

SOLUCIÓN

a) $\vec{v}(t)) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} \rightarrow \vec{v}(t) = (\,2t + 1)\vec{i} - (\,9t^2 + 4t\,)\vec{j}\ \ m \cdot s^{-1}$

b) $\vec{a}(t)) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t) = 2\vec{i} - (\,18t + 4)\vec{j}\ \ m \cdot s^{-2}$

c) Debemos conocer la posición en los instantes $t = 2$ y $t = 3$ segundos.

$\vec{r}(3) = (3^2 + 3 + 1)\vec{i} - (3^3 + 2 \cdot 3^2)\vec{j} \rightarrow \vec{r}(3) = 11\,\vec{i} - 99\,\vec{j}\ m$

$\vec{r}(2) = (2^2 + 2 + 1)\vec{i} - (2^3 + 2 \cdot 2^2)\vec{j} \rightarrow \vec{r}(2) = 5\,\vec{i} - 32\,\vec{j}\ m$

$\vec{v}_M = \dfrac{(\,11\,\vec{i} - 99\,\vec{j}\,) - (5\,\vec{i} - 32\,\vec{j}\,)}{3 - 2} \rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_M = 6\,\vec{i} - 67\,\vec{j}\ m \cdot s^{-1}}$

d) Debemos conocer la velocidad en los instantes $t = 2$ y $t = 3$ segundos.

$\vec{v}(3) = (2 \cdot 3 + 1)\vec{i} - (9 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3)\vec{j} \rightarrow \vec{v}(3) = 7\vec{i} - 93\,\vec{j}\ m/s$

$\vec{v}(2) = (2 \cdot 2 + 1)\vec{i} - (9 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2)\vec{j} \rightarrow \vec{v}(3) = 5\vec{i} - 44\,\vec{j}\ m/s$

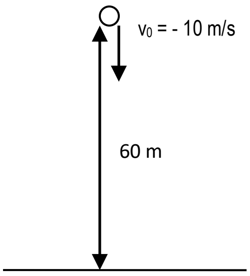
$\vec{a}_M = \dfrac{(\,7\,\vec{i} - 93\,\vec{j}\,) - (5\,\vec{i} - 44\,\vec{j}\,)}{3 - 2} \rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_M = 2\,\vec{i} - 49\,\vec{j}\ m \cdot s^{-2}}$

5º. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:

a) Velocidad con la que llega al suelo.

b) Tiempo que tarda en llegar al suelo
c) Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
d) Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado 3)

SOLUCIÓN



a) b) Caída libre. Es un mrua con aceleración – 9’8 $m \cdot s^{-2}$

Condición suelo y = 0. Hallo el tiempo que tarda.

$0 = 60 - 10 \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ → **t = 2’62 s** (tomo solución positiva)

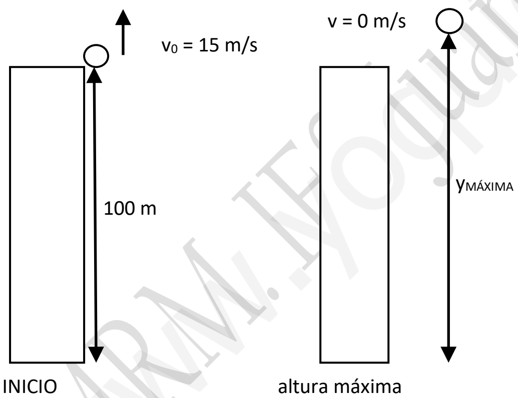
Sustituyo en la expresión de la velocidad.

$v = v_0 + a \cdot t$ → $v = -10 - 9'8 \cdot 2'62$ → **$v = -35'68\ m \cdot s^{-1}$**

c)d) Para y = 30 metros, hallo el tiempo que tarda en llegar:

$30 = 60 - 10 \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ → **$v = -26'23\ m \cdot s^{-1}$**

6º. Desde lo alto de una torre de 100m de alta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con la velocidad de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como origen de ordenadas el punto de lanzamiento, calcular la posición y la velocidad de la piedra al cabo de 1 y 4 s después de su salida. ¿Cuál es la altura alcanzada por la piedra y qué tiempo tarda en alcanzarla?. Asimismo, calcular la velocidad cuando se encuentra a 8 m por encima del punto de partida y cuando cayendo pasa por el punto de partida. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto?. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y qué velocidad lleva en ese momento?.



Condiciones iniciales: $y_0 = 0$ metros, $v_0 = 15$ m/s

$y(1) = 0 + 15 \cdot 1 - ½ \cdot 9'8 \cdot 1^2$ → **y(1) = 10’1 m**

$y(4) = 0 + 15 \cdot 4 - ½ \cdot 9'8 \cdot 4^2$ → **y(4) = -18’4 m**

Altura máxima: Condición v = 0

$0 = 15 - 9'8 \cdot t$ → t = 1’53 s. Sustituyo en posición

$y_{MAX} = 0 + 15 \cdot 1'53 - 1/2 \cdot 9'8 \cdot 1'53^2$ → **y_{MAX} = 11’48 m**

Todas las alturas con respecto al punto inicial.

Para hallar la velocidad cuando se halla a 8 metros del punto de partida, habrá que hallar el tiempo que tarda en llegar a ese punto. Utilizamos la ecuación de posición.

$8 = 0 + 15 \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ → Dos soluciones positivas:

t = 0’69 s → $v = v_0 + a \cdot t$ → $v = 15 - 9'8 \cdot 0'69$ → **v = 8’23 m/s (SUBE)**

t = 2’37 s → $v = v_0 + a \cdot t$ → $v = 15 - 9'8 \cdot 2'37$ → **v = -8,23 m/s (BAJA)**

Para hallar la velocidad que tiene cuando pasa por el punto de partida, habrá que hallar el tiempo que tarda en volver . Utilizamos la ecuación de posición (punto de partida y = 0).

$0 = 0 + 15 \cdot t\ ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$. Dos soluciones: 0 que es el instante inicial y 3’06 segundos.

t = 3’06 s → $v = v_0 + a \cdot t$ → $v = 15 - 9'8 \cdot 3'06$ → **v = - 15 m/s (BAJA)**

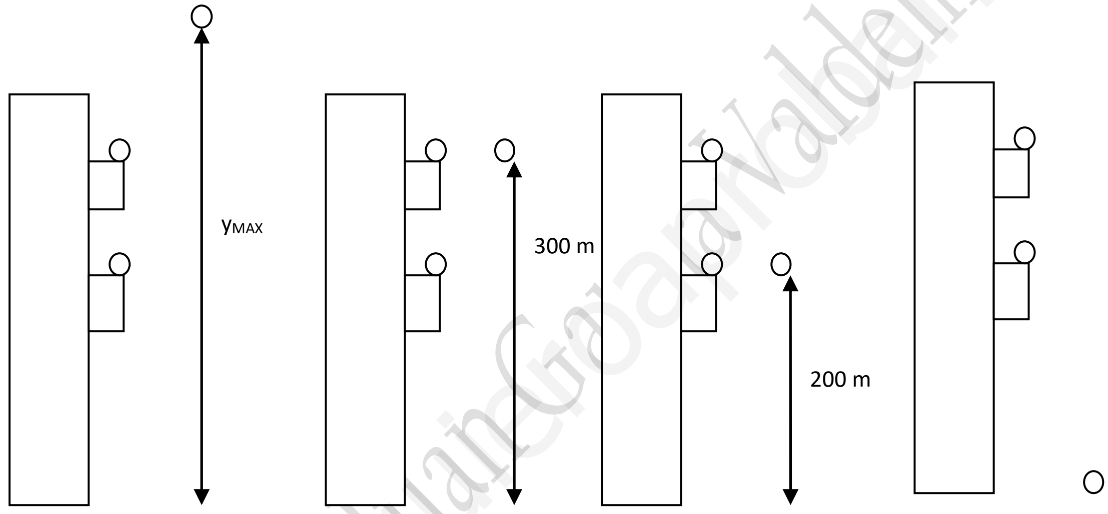
Por último, el suelo se encuentra en la posición y = -100 metros. Hallo el tiempo hasta llegar a ese punto.

$-100 = 0 + 15\cdot t - 1/2\cdot 9'8^2 \rightarrow t = 6'3$ segundos. Se tomo únicamente la solución positiva.

$v = v_0 + a\cdot t \rightarrow$ **$v = -46'74$ m/s**

7º. Una piedra que cae libremente pasa a las 10 frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo y a las 10 y 2" frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Calcular:

a) altura desde la que cae.
b) En qué momento llegará al suelo.
c) La velocidad con la que llegará al suelo.



a) instante inicial   b) 10 en punto   c) 10 y 2"   d) suelo

a) Para hallar la altura desde la que cae el objeto, necesitamos conocer la velocidad que lleva el objeto a una altura determinada. Podemos hallar la velocidad del objeto a los 300 metros, ya que sabemos que pasa desde los 300 metros a los 200 metros en 2 segundos. Tomamos como instante inicial en ese intervalo el momento en que pasa por la altura 300 metros. Tomamos la ecuación de posición del mrua:

$y = y_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \rightarrow 200 = 300 + v_{300}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 9'8\cdot 2^2 \rightarrow v_{300} = -40'2\ m\cdot s^{-1}$

Con este dato se puede hallar la altura máxima (figura a)). Hallamos el tiempo que tarda en pasar de la figura a) hasta la figura b). Tomo la velocidad inicial la de a), es decir 0 m/s y la velocidad final la de b), es decir -40’2 m/s.

$v = v_0 + a\cdot t \rightarrow -40'2 = 0 - 9'8\cdot t \rightarrow t = 4'1$ segundos

Por lo tanto, se puede hallar la altura inicial, utilizando como posición final y = 300.

$y = y_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \rightarrow 300 = y_0 + 0\cdot 4'1 - \frac{1}{2}\cdot 9'8\cdot 4'1^2 \rightarrow$ **$y_0 = 382'37$ metros**

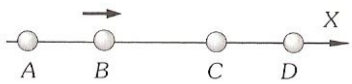
b) Suelo: condición y = 0. Sustituyo desde y = 300 metros (10 en punto).

$y = y_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \rightarrow 0 = 300 - 40'2\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9'8\cdot t^2 \rightarrow t = 4'73$ segundos.

Pasa a las 10 y 4’73 segundos

c) $v = -40'2 - 9'8 \cdot 4'73 \rightarrow$ $\mathbf{v_{SUELO} = -86'58\ m/s}$

8º. Un móvil parte del reposo y de un punto A (ver figura) con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado ($a = 10\ cm/s^2$); tarda en recorrer una distancia BC = 105 cm un tiempo de 3 s y finalmente, llega al punto D (CD = 55 cm). Calcular:



a) La velocidad del móvil en los puntos B, C y D.
b) La distancia AB
c) El tiempo invertido en el recorrido AB y en el CD.
d) El tiempo total en el recorrido AD.

SOLUCIÓN

Tomo unidades del sistema internacional. Por lo tanto, $a = 0'1\ m \cdot s^{-2}$, distancia BC = 1'05 m

Tomo ese dato para hallar la velocidad en B. Utilizo la ecuación de posición del mrua.

$x_C = x_B + v_B \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x_C - x_B = v_B \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 1'05 = 3 \cdot v_B + ½ \cdot 0'1 \cdot 3^2$.

$\mathbf{v_B = 0'2\ m/s.}$

Utilizo la ecuación de la velocidad del mrua para hallar la velocidad en C.

$v_C = v_B + a \cdot t \rightarrow v_C = 0'2 + 0'1 \cdot 3 \rightarrow$ $\mathbf{v_C = 0'5\ m/s.}$

Para hallar la velocidad en D, debo hallar el tiempo que se tarda en recorrer la distancia CD. Utilizo la ecuación de posición del mrua:

$x_D - x_C = v_C \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 0'55 = 0'5 \cdot t + ½ \cdot 0'1 \cdot t^2 \rightarrow$ $\mathbf{t_{CD} = 1\ segundo}$

Utilizo este dato para hallar la velocidad en D:

$v_D = v_C + a \cdot t \rightarrow v_D = 0'5 + 0'1 \cdot 1 \rightarrow$ $\mathbf{v_D = 0'6\ m \cdot s^{-1}.}$

b) Para hallar la distancia AB, necesito conocer el tiempo que tarda. Utilizo la ecuación de la velocidad del mrua.

$v_B = v_A + a \cdot t \rightarrow 0'2 = 0 + 0'1 \cdot t \rightarrow$ $\mathbf{t_{AB} = 2\ segundos.}$

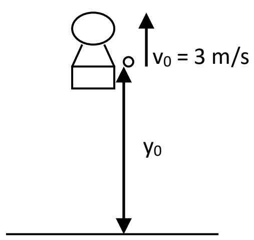
Ahora utilizo este dato en la ecuación de posición del mrua.

$x_B - x_A = v_A \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x_B - x_A = 0 \cdot 2 + ½ \cdot 0'1 \cdot 2^2 \rightarrow$ $\mathbf{x_B - x_A = 0'2\ metros}$

d) El tiempo total será: 2 + 3 + 1 = 6 segundos

9º. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad de 3 m/s; si llega al suelo a los 3 s, calcular:

a) altura a la que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
b) Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.



SOLUCIÓN

a) Condición suelo: y = 0. Utilizo la ecuación de posición del mrua

$y = y_0 + v_0 \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 0 = y_0 + 3 \cdot 3 - ½ \cdot 9'8 \cdot 3^2$

Altura del globo = 35'1 metros

b) Para hallar la distancia a la que se encuentran el globo y la piedra a los 2 segundos del lanzamiento, se debe hallar las posiciones de ambos en ese instante.

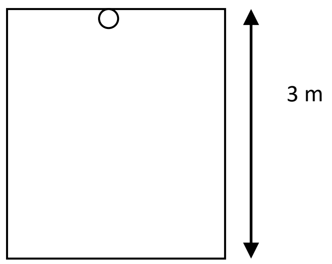
GLOBO: Sube a velocidad constante: $y_{GLOBO} = 35'1 + 3 \cdot 2 \rightarrow y_{GLOBO} = 41'1$ metros.

PIEDRA: Caída libre: $y_{PIEDRA} = 35'1 + 3 \cdot 2 - ½ \cdot 9'8 \cdot 2^2 \rightarrow y_{PIEDRA} = 21'5$ metros

distancia = 41’1 – 21’5 → distancia = 19’6 metros

10º. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s^2. Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar tonel suelo del ascensor.

SOLUCIÓN



En el instante inicial, el ascensor y la lámpara llevan la misma velocidad. Cuando se desprende, la lámpara toma la aceleración de la gravedad, mientras que el ascensor sigue con su misma aceleración. Chocan cuando coinciden las posiciones del suelo y de la lámpara. Posiciones iniciales: Lámpara = 3 metros y suelo = 0 metros

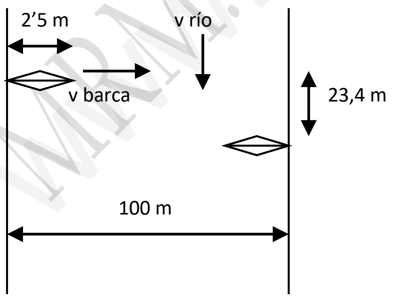
$y_{LÁMPARA} = 3 + v_0 \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$; $y_{SUELO} = 0 + v_0 \cdot t + ½ \cdot 1 \cdot t^2$. Choque $y_{LÁMPARA} = y_{SUELO}$.

$3 + v_0 \cdot t - 4'9 \cdot t^2 = 0 + v_0 \cdot t + 1 \cdot t^2 \rightarrow$ **t = 0’75 segundos.**

11º. Una canoa de 2’5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23’4 m.

a) calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.
b) si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recurrido en 1 min según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.

SOLUCIÓN



a) La barca avanza 97’5 metros para llegar a la otra orilla. Hallamos el tiempo necesario: $97'5 = 5 \cdot t \rightarrow t = 19'5$ s. Conociendo la distancia recorrida por la barca por la corriente, hallamos la velocidad de la corriente:

$23'4 = v_{RÍO} \cdot 19'5 \rightarrow$ **$v_{RIO} = 1'2$ m·s^{-1}.**

b) Ahora la barca se mueve en la misma dirección que la corriente. Por lo tanto, la velocidad de la barca será la suma de ambas.

En el mismo sentido: $v_{TOTAL} = 5 + 1'2 \rightarrow v_{TOTAL} = 6'2$ m·s^{-1}. Por lo tanto, en un minuto recorre:

espacio = $6'2 \cdot 60 \rightarrow$ **espacio = 372 metros.**

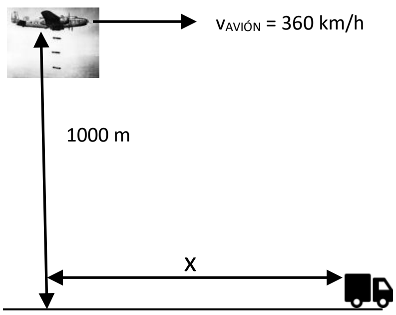
En el sentido contrario: $v_{TOTAL} = 5 – 1'2 \rightarrow v_{TOTAL} = 3'8\ m·s^{-1}$. Por lo tanto, en un minuto recorre:

$$\text{espacio} = 3'8 \cdot 60 \rightarrow \textbf{espacio = 228 metros}$$

12º. Un avión de bombardeo, en vuelo horizontal, a la velocidad de 360 km/h, y a una altura sobre un objetivo de 1000 m, lanza una bomba.

a) ¿A qué distancia del objetivo inmóvil, contada horizontalmente, debe proceder al lanzamiento?.
b) Si el objetivo es un camión que marcha en carretera horizontal, a 72 km/h en la misma dirección y plano vertical que el bombardero ¿a qué distancia del objetivo, contada horizontalmente, se debe proceder al lanzamiento si el objetivo se mueve en distinto o en el mismo sentido?.

SOLUCIÓN

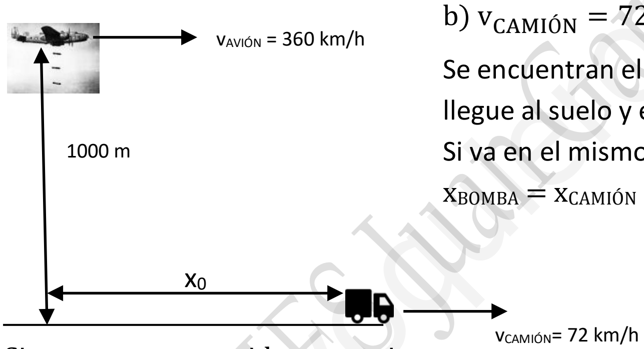


$$a)\ v = 360\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} \rightarrow 100\ m/s$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo será el tiempo que necesite para recorrer 1000 metros en el eje Y.

$0 = 1000 + 0·t – ½ · 9'8 · t^2 \rightarrow t = 14'29$ s.

$x = 0 + 14'29 · 100 \rightarrow$ **x = 1429 metros**



$$b)\ v_{CAMIÓN} = 72\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} \rightarrow 20\ m/s$$

Se encuentran el camión y la bomba cuando esta última llegue al suelo y están en la misma posición en el eje X.

Si va en el mismo sentido:

$x_{BOMBA} = x_{CAMIÓN} \rightarrow 0 + 100·14'29 = x_0 + 20·14'29$

$\mathbf{x_0 = 1143'2}$ **metros**

Si se mueve en sentido contrario:

$x_{BOMBA} = x_{CAMIÓN} \rightarrow 0 + 100·14'29 = x_0 - 20·14'29$

$\mathbf{x_0 = 1714'8}$ **metros**

13º. Sobre la superficie de un lago, a 5 m sobre ella horizontalmente, se dispara un proyectil, con una velocidad de 5 m/s. Calcular:

a) El tiempo que tarda el proyectil en introducirse en el agua.
b) La distancia horizontal recorrida por el proyectil hasta introducirse en el agua.
c) Valor de la tangente del ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal en el momento que el proyectil se introduce en el lago.

a) Cuando llega al agua y = 0.

$0 = 5 + 0 · t – ½ · 9'8 · t^2 \rightarrow$ **t = 1'01 s**

b) $x = 5 · 1'01 \rightarrow$ **x = 5'05 metros**

c) Debemos hallar el valor de v_y cuando y=0

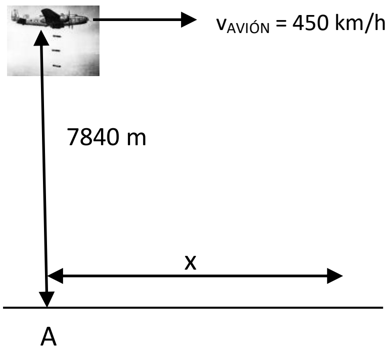
$v_y = 0 – 9'8 · 1'01 \rightarrow v_y = - 9'9$ m/s. Ahora hallamos la tangente del ángulo de entrada.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{-9'9}{5} \rightarrow \mathbf{tg\ \theta = -1'98} \rightarrow \theta = -63'2°$$

14º. Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7840 m y con una velocidad de 450 km/h, deja caer una bomba al pasar por la vertical de un punto A del suelo.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo se producirá la explosión de la bomba por choque con el suelo?.
b) ¿Qué distancia habrá recorrido entre tanto el avión?
c) ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión?
d) ¿Cuánto tiempo tardará en oírse la explosión desde el avión, a contar desde el instante del lanzamiento de la bomba, si el sonido se propaga a 330 m/s?.

SOLUCIÓN



a) $v = 450\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} \rightarrow 125\ m/s$

El tiempo que tarda en llegar al suelo será el tiempo que necesite para recorrer 7840 metros en el eje Y.

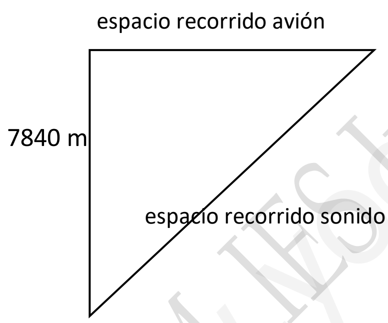
$0 = 7840 + 0 \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ → **t = 40 s.**

b) espacio recorrido por el avión

$x = 0 + 450 \cdot 40$ → **x = 5000 metros**

c) 5000 metros

d) Cuando explosione la bomba, el sonido comenzará a propagarse en forma de ondas esféricas. El avión continúa moviéndose, por lo que se formará el siguiente triángulo rectángulo:



el espacio recorrido por el avión será igual a:

espacio avión = $125 \cdot t$

El espacio recorrido por el sonido será igual a:

espacio sonido = $330 \cdot t$

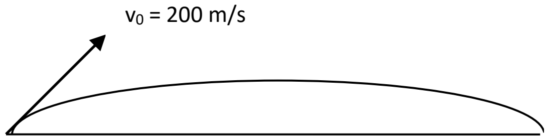
Aplico el teorema de Pitágoras:

$7840^2 + (125 \cdot t)^2 = (330 \cdot t)^2$ → **t = 38'24 segundos.**

15º. Se dispara un cañón con un ángulo de 15º, saliendo la bala con la velocidad de 200 m/s. Se desea saber:

a) La distancia teórica que alcanzará la bala sobre la horizontal.
b) La velocidad con que llega a tierra en valor absoluto y dirección.
c) Si tropieza con una colina que se encuentra a mitad de su alcance, de 300 m de altura.
d) En caso afirmativo, ¿qué solución podríamos dar si queremos hacer blanco en el mismo objetivo y con el mismo cañón disparando desde el mismo sitio?.

SOLUCIÓN



X (mru)	Y(mrua)
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$v_{0x} = 200 \cdot \cos 15º$	$v_{0Y} = 200 \cdot \text{sen } 15º$

a) Alcance, condición y = 0. Utilizamos la ecuación de posición mrua.

$0 = 0 + 200 \cdot \text{sen } 15º \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ → $t = 10'56$ s. Sustituyo ese valor en la expresión de x

$x = 200 \cdot \cos 15º \cdot 10'56$ → **alcance = 2040'82 metros.**

b) Hallamos el valor de la componente en Y de la velocidad, ya que la componente en X no varía. Sustituyo en la expresión de velocidad del mrua el valor de tiempo hallado.

$v_y = 200 \cdot \text{sen}15º \cdot (-9'8) \cdot 10'56$ → $v_y = -51'72$ m/s. Puede hallar el modulo del vector velocidad y el ángulo que forma con la horizontal:

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x} \rightarrow \theta = \text{arctg}\,\frac{-\,51'76}{193'19} \rightarrow \boldsymbol{\theta = -15°}; v = \sqrt{193'19^2 + (-51'76)^2} \rightarrow$$

$$\mathbf{v = 200\ m/s}$$

c) Hallamos la altura del misil a mitad de camino, es decir, cuando x = 1020'41 m. Hallo t

$1024'41 = 193'5 \cdot t$ → $t = 5'28$ s. Sustituyo en la expresión de la posición de Y.

$y = 0 + 51'76 \cdot 5'28 - 4'9 \cdot 5'28^2$ → $y = 136'5$ metros, es decir, **tropieza.**

d) Para llegar al mismo sitio con la misma velocidad inicial hay dos caminos, dependiendo del ángulo de salida. Combino las expresiones de posición de X e Y con la condición suelo.

$0 = 200 \cdot \text{sen } \theta \cdot t - 4'9 \cdot t^2$

$x = 0 + 200 \cdot \cos\theta \cdot t \;\rightarrow\; t = \dfrac{x}{200 \cdot \cos\theta}$. Sustituyo

$$0 = 200 \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{x}{200 \cdot \cos\theta} - \frac{4'9 \cdot x^2}{200^2 \cdot \cos^2\theta} \rightarrow 200^2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot x - 4'9 \cdot x^2 = 0$$

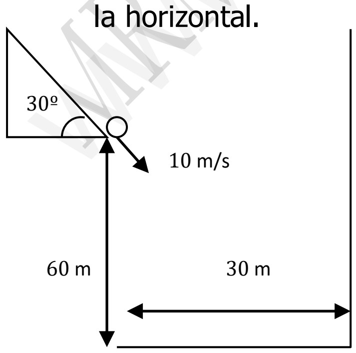
siendo x = 2040'82 para que caiga en el mismo sitio. Como $2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta = \text{sen}2\theta$

$4'0976 \cdot 10^7 \cdot \text{sen}2\theta - 2'04 \cdot 10^7 = 0$. Obtengo dos soluciones:

$2 \cdot \theta = 30º$ → $\theta = 15º$ (ya utilizada) y $2 \cdot \theta = 150º$ → $\theta = 75º$. Para x = 1020'41 m con ese valor necesita un tiempo de 19'71 segundos y la altura en ese punto es de 1903 metros, por lo que si se consigue

16º. Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30º con la horizontal, y al llegar a su extremo, queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es 60 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado 30 m. Calcular:

a) Ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y ecuación de la trayectoria en forma explícita (tomar eje positivo de las Y el descendente)
b) ¿ llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta?
c) Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad en ese momento.
d) Posición en que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45º con la horizontal.



Hallamos las componentes en X e Y de v_0:

$v_{0x} = 10 \cdot \cos 30º$ → $v_{0x} = 8'66$ m/s

$v_{0y} = 10 \cdot \text{sen } 30º$ → $v_{0y} = 5$ m/s

Escribo las expresiones de posición de X e Y, siendo Y positivo el sentido descendente.

$x = 0 + 8'66 \cdot t$ → $t = x/8'66$

$y = 0 + 5 \cdot t + ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$ ($y_0 = 0$ metros)

$$y = \frac{5 \cdot x}{8'66} + 4'9 \cdot \frac{x^2}{8'66^2} \rightarrow \mathbf{y = 0'58 \cdot x + 0'065 \cdot x^2}$$

b) Hallamos el valor de x cuando llegue la pelota al suelo (y = 60)

$60 = 0'58 \cdot x + 0'065 \cdot x^2$ → **x = 26'24 metros. Por lo tanto, bota en el suelo.**

c) Hallo t para y = 60 metros → 60 = 5·t +1/2 · 9’8 · t^2 → t = 3’03 s. Se toma valor positivo. Sustituyo para hallar el valor de v_y, ya que v_x es constante

v_y = 5 + 9’8· 3’03 → v_y = 34’66 m/s. Hallo el valor del módulo de la velocidad

$$v = \sqrt{8'66^2 + 34'66^2} \rightarrow \mathbf{v = 35'72 m/s}$$

d) Para que el ángulo sea de 45º, $v_x = v_y$. Como la componente en x es constante, v_y debe valer 8’66 m/s. Hallo el tiempo que transcurre hasta que v_y toma ese valor:

8’66 = 5 + 9’8 · t → t = 0’37 s. Los valores de posición para ese instante en X e Y:

x = 8’66 · 0’37 → x = 3’2 m

y = 5 · 0’37 + ½ · 9’8 · 0’37^2 → y = 2’52 m

La posición es: **(3’2,2’52)**

17º. Con un proyectil queremos rebasar una colina de 300 m de alta y 500 m de distancia desde el punto de lanzamiento a la cima. Calcular:

a) ángulo de lanzamiento.
b) Velocidad mínima necesaria.

SOLUCIÓN

Hallamos la ecuación de trayectoria del movimiento. Punto de partida: (0,0)

$x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$ → $t = x/(v_0 \cdot \cos\theta)$. Sustituyo en la expression de y

$y = v_0 \cdot \text{sen}\theta \cdot t - ½ \cdot 9'8 \cdot t^2$

$$y = x \cdot \text{tg}\theta - \frac{9'8}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot x^2. \text{Despejo } v_0^2$$

$$v_0^2 = \frac{9'8 \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2\theta \cdot (x \cdot \text{tg}\theta - y)} \rightarrow v_0^2 = \frac{9'8 \cdot x^2}{x \cdot \text{sen}2\theta - 2y \cdot \cos^2\theta}$$

Derivo con respecto a θ e igualo a 0 para minimizar

$$2 \cdot v_0 \cdot \frac{dv_0}{d\theta} = -9'8 \cdot x^2 \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \cos2\theta + 4 \cdot y \cdot \cos\theta . \text{sen}\theta}{(x \cdot \text{sen}2\theta - 2 \cdot y \cdot \cos^2\theta)^2} = 0. \text{Como } \text{sen}2\theta = 2 \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

la ecuación queda como:

$$x \cdot \cos2\theta + y \cdot \text{sen}2\theta = 0 \rightarrow \text{tg } 2\theta = \frac{-x}{y}. \text{Como x} = 500 \text{ metros e y} = 300 \text{ metros}$$

$$\text{tg}2\theta = \frac{-4}{3} \rightarrow \mathbf{\theta = 63'43°y} \text{ la velocidad mínima es } \mathbf{88'5m/s}$$

18º. Un niño da un puntapié a un balón que está a 20 cm del suelo, con un ángulo de 60º sobre la horizontal. A 3 metros, delante del niño, hay una alambrada de un recinto deportivo que tiene una altura de 3 metros. ¿Qué velocidad mínima debe comunicar al balón para que sobrepase la alambrada?.

SOLUCIÓN

Partimos de la ecuación de la trayectoria, hallada en el ejercicio anterior

$$y = y_0 + x \cdot \text{tg}\theta - \frac{9'8}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot x^2 \rightarrow y = 0'2 + x \cdot \text{tg}60° - \frac{9'8}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 60°} \cdot x^2$$

Sustituyo x = 3 metros e y = 3 metros, con lo que la única incógnita es v_0

$$3 = 0'2 + 3 \cdot 1'732 - \frac{9'8}{2 \cdot v_0^2 \cdot 0'5^2} \cdot 3^2 \rightarrow \mathbf{v_0 = 8'58 \ m/s}$$

19º. Un disco gira con una velocidad angular de 60 rpm. Si su radio es 1m, calcular:

a) Velocidad angular en rad/s.
b) Velocidad lineal de un punto de la periferia y de un punto a 50 cm de su centro.
c) Número de vueltas que da en media hora.

SOLUCIÓN

a) $60\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\cdot\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}}\ \rightarrow\ \boldsymbol{\omega = 2\cdot\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

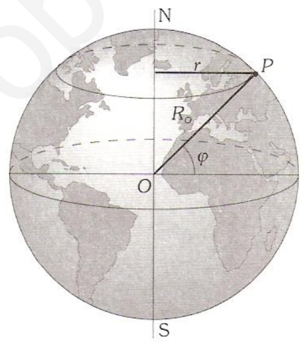
b) $v = \omega \cdot R$. Sólo hay que sustituir el valor de R.

$v(0'5) = 2\cdot\pi\cdot 0'5 \rightarrow \boldsymbol{v(0'5) = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

$v(1) = 2\cdot\pi\cdot 1 \rightarrow \boldsymbol{v(1) = 2\cdot\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

c) $\theta = \omega\cdot t \rightarrow \theta = 2\cdot\pi\cdot 1800 \rightarrow \theta = 3600\cdot\pi$ radianes.

$$3600\cdot\pi\ \cancel{\text{radianes}}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{2\cdot\pi\ \cancel{\text{radianes}}}\ \rightarrow\ \textbf{1800 vueltas}$$



20º. Calcular la velocidad tangencial y la aceleración normal de un punto P sobre la Tierra (ver figura) situado en un lugar de 60º latitud. (radio terrestre = 6300 km).

SOLUCIÓN

$$\omega = \frac{2\pi}{24}\text{ rad/hora}$$

Llamando r al radio del paralelo de longitud φ, su relación con el radio terrestre es:

$r = R_0 \cdot \cos\varphi$, con lo que

$$v = \omega\cdot r \rightarrow v = \omega\cdot R_0\cdot\cos\varphi \rightarrow v = \frac{2\cdot\pi}{24}\cdot 6300\cdot\frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{v = 824\ km/h}$$

$$a_N = \omega^2\cdot r \rightarrow a_N = \omega^2\cdot R_0\cdot\cos\varphi \rightarrow a_N = \frac{4\cdot\pi^2}{24^2}\cdot 6300\cdot\frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{a_N = 216\ km/h^2}$$

21º. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de radio 1m, dando 30 vueltas cada minuto. Calcular el período, la frecuencia, la velocidad angular, la tangencial y la aceleración centrípeta.

SOLUCIÓN

$$\omega = 30\,\frac{\cancel{\text{vueltas}}}{\cancel{\text{minuto}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{minuto}}}{60\text{ s}}\cdot\frac{2\cdot\pi\text{ radianes}}{1\,\cancel{\text{vuelta}}}\ \rightarrow\ \boldsymbol{\omega = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\cdot\pi} \rightarrow \text{frecuencia} = \frac{\pi}{2\cdot\pi} \rightarrow \textbf{frecuencia = 0'5Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow T = \frac{1}{0'5} \rightarrow \textbf{T = 2 segundos}$$

$v = \omega\cdot R \rightarrow v = \pi\cdot 1 \rightarrow \boldsymbol{v = \pi\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

$\boldsymbol{a_{tg} = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

$a_N = \omega^2\cdot R \rightarrow a_N = \pi^2\cdot 1 \rightarrow \boldsymbol{a_N = \pi^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

22º. Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3000 rpm. Un freno lo para en 20 s. Calcular:

a) La aceleración angular supuesta constante.
b) Número de vueltas dadas por el volante hasta que se para.
c) El módulo de la aceleración tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

SOLUCIÓN

a) Partiendo de los datos, hallamos la velocidad angular inicial.

$$\omega = 3000\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{2\cdot\pi\,\text{rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}}\cdot\frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} \rightarrow \omega = 100\cdot\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Hallamos la aceleración angular, ya que conocemos la velocidad angular inicial y la final y el tiempo que transcurre.

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \rightarrow \alpha = \frac{0 - 100\cdot\pi}{20} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = -5\cdot\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}}$$

b) $\theta - \theta_0 = \omega_0 \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2 \rightarrow \theta - \theta_0 = 100\cdot\pi\cdot 20 - 0'5\cdot 5\cdot\pi\cdot 20^2 \rightarrow$

$\theta - \theta_0 = 1000\cdot\pi$ radianes. Para hallar el número de vueltas:

$$\text{número de vueltas} = 1000\cdot\pi\,\cancel{\text{radianes}}\cdot\frac{1\text{ vuelta}}{2\cdot\pi\,\cancel{\text{radianes}}} \rightarrow \textbf{500 vueltas}$$

c) $a_{tg} = \alpha \cdot R \rightarrow a_{tg} = -5\cdot\pi\cdot 0'1 \rightarrow \boldsymbol{a_{tg} = -0'5\cdot\pi\,m\cdot s^{-2}}$

Para hallar la aceleración normal, necesito conocer la velocidad en ese punto.

Cuando ha dado 100 vueltas, ha rotado $200\cdot\pi$ radianes. Hallamos el tiempo necesario.

$200\pi = 100\pi\cdot t - 2'5\pi\cdot t^2 \rightarrow t = 2'11$ segundos. Hallo la velocidad angular

$\omega = 100\pi - 5\pi\cdot 2'11 \rightarrow \omega = 89'45\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$a_N = \omega^2\cdot R \rightarrow a_N = (89'45\pi)^2\cdot 0'1 \rightarrow \boldsymbol{a_N = 800\pi^2\,m\cdot s^{-2}}$.

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_{tg}^2} \rightarrow a = \sqrt{(\mathbf{0'5\,\pi})^2 + (\mathbf{800\pi^2})} \rightarrow \mathbf{a = 801\pi^2\,m\cdot s^{-2}}$$

23º. Un automotor parte del reposo, en una vía circular de 400 m de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50 s de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

a) La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.
b) La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en es tiempo, en el momento de cumplirse los 50 s.
c) La velocidad angular media en la 1ª etapa, y la velocidad angular a los 50 s.
d) Tiempo que tardará el automotor en dar cien vueltas al circuito.

SOLUCIÓN

a) Utilizamos la ecuación de velocidad del mrua. Primer paso, transformar las unidades a SI.

$$72\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}} \rightarrow 20\,m/s$$

$v = v_0 + a\cdot t \rightarrow 20 = 0 + a\cdot 50 \rightarrow \boldsymbol{a = 0'4\,m\cdot s^{-2}}$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow a_N = \frac{20^2}{400} \rightarrow \boldsymbol{a_N = 1\,m\cdot s^{-2}}$$

$$a_{total} = \sqrt{a_N^2 + a_{tg}^2} \rightarrow a_{total} = \sqrt{0'4^2 + 1^2} \rightarrow \mathbf{a_{total} = 1'08\ m \cdot s^{-2}}$$

La longitud recorrida. Utilizamos la ecuación de posición del mrua

espacio recorrido = $v_0 \cdot t + ½ \cdot a_{tg} \cdot t^2$ → espacio recorrido = 0 · 50 + ½ ·0'4 · 50^2 →
espacio recorrido = 500 metros

c) Hay que hallar el ángulo barrido durante los primeros 50 segundos. Necesito conocer α.

$$\alpha = \frac{a_{tg}}{R} \rightarrow \alpha = \frac{0'4}{400} \quad \alpha = 10^{-3}\ rad \cdot s^{-1}$$

$\theta - \theta_0 = \omega_0 \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$ → $\theta - \theta_0 = 0 \cdot 50 + ½ \cdot 10^{-3} \cdot 50^2$ → $\theta - \theta_0 = 1'25$ radianes

$$\omega_{media} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t} \rightarrow \omega_{media} = \frac{1'25}{50} \rightarrow \boldsymbol{\omega_{media} = 2'5 \cdot 10^{-2} rad \cdot s^{-2}}$$

$$\omega(50) = \frac{v(50)}{R} \rightarrow \omega(50) = \frac{20}{400} \rightarrow \boldsymbol{\omega(50) = 5 \cdot 10^{-2}\ rad \cdot s^{-1}}$$

d) 100 vueltas son 200π radianes. En los primeros 50 segundos recorre 1'25 radianes, por lo que le restan 627'07 radianes. A partir de ahí, el movimiento es circular uniform, por lo que tarda:

627'07 = $5 \cdot 10^{-2} \cdot t$ → t = 12541 segundos. **En total tarda 12591 segundos.**

24º. Dos móviles parten simultáneamente del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una trayectoria circular. El primero está animado de movimiento uniforme de velocidad angular 2 rad/s y el segundo hace su recorrido con aceleración angular constante de valor 1 rad/s^2. ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo y qué ángulo han descrito en tal instante?, La circunferencia sobre la cual se mueven los móviles es de 2 m de radio. ¿Qué velocidad tiene cada uno de los móviles en el instante de la reunión?, ¿Qué aceleración tangencial?, ¿qué aceleración normal?¿qué aceleración resultante y en qué dirección?

SOLUCIÓN

Primer móvil: $\theta_1 = \omega_1 \cdot t$

Segundo móvil: $\theta_2 = ½ \cdot \alpha_2 \cdot t^2$ (parte del reposo)

Se reúnen de nuevo cuando $\theta_1 = \theta_2$ → $\omega_1 \cdot t = ½ \cdot \alpha_2 \cdot t^2$ → $2 \cdot t = ½ \cdot 1 \cdot t^2$

$0'5 \cdot t^2 - 2 \cdot t = 0$ → **t = 4 s**

θ = 2 · 4 → **θ = 8 radianes**

$v_1 = \omega_1 \cdot R$ → $v_1 = 2 \cdot 2$ → $\mathbf{v_1 = 4\ m/s}$

$\omega_2 = \alpha \cdot t$ → $\omega_2 = 1 \cdot 4$ → $\omega_2 = 4\ rad \cdot s^{-1}$ Entonces: $v_2 = 4 \cdot 2$ → $\mathbf{v_2 = 8\ m/s}$

El primer móvil no tiene aceleración tangencial, ya que se mueve a velocidad constante.

$a_{tg2} = \alpha \cdot R$ → $a_{tg2} = 1 \cdot 2$ → $\mathbf{a_{tg2} = 2\ m \cdot s^{-2}}$.

$a_{N1} = \omega^2 \cdot R$ → $a_{N1} = 2^2 \cdot 2$ → $\mathbf{a_{N1} = 8\ m \cdot s^{-2}}$. **La aceleración total será la misma y dirigida hacia el centro de la circunferencia.**

$a_{N2} = \omega^2 \cdot R \rightarrow a_{N2} = 4^2 \cdot 2 \rightarrow \mathbf{a_{N2} = 32\ m \cdot s^{-2}}$.

$$a_{\text{total2}} = \sqrt{a_N^2 + a_{tg}^2} \rightarrow a_{\text{total2}} = \sqrt{2^2 + 32^2} \rightarrow \mathbf{a_{total2} = 32'06\ m \cdot s^{-2}}$$

El ángulo que forma la aceleración total con respecto al radio lo hallaremos con la tangente del mismo:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{a_{tg}}{a_N} \rightarrow \text{tg}\beta = \frac{2}{32} \rightarrow \boldsymbol{\beta = 3'58°}$$