

Tema 15. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD**Autoevaluación**

1. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{5 - x}$ c) $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$

2. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{5 - x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

3. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x}$ c) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3}$

4. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$

5. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{4x - 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + 3x^2 + 5x - 2}$

6. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2 - x}$ b) $f(x) = \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{x^2 + x}$ c) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - x}$

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos en el punto $x = 1$, y si es continua, indica el valor de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

a) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 1 \\ 2x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Haz una gráfica que confirme tu resultado.

8. Halla los puntos en los que las siguientes funciones no son continuas. ¿Puede evitarse en algún caso la discontinuidad?

a) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

9. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

10. Determina las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x}$. Indica también la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

11. Halla el valor que debe tener a para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ 3x - a & x \geq 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$.

12. Halla el valor que debe tener a para que sea continua cada una de las siguientes funciones en toda la recta real:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ x - a, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & \text{si } x < 2 \\ 1 - ax, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Soluciones.

1. a) -1 ; ∞ ; $-1/6$; ∞ ; $23/12$. b) No existe; $-1/4$; No existe; 0 ; ∞ . c) $e^{-1/2}$; 1 ; e^{-1} ; $e^{1/2}$; e^2 .

2. a) 2. b) $-1/4$. c) $+\infty$.

3. a) ∞ ; 1 ; -1 ; $1/3$. b) ∞ ; 1 ; -1 ; $1/3$. c) 0 ; $-1/2$; $1/4$; ∞ .

4. a) $1/2$. b) 4. c) $3/4$.

5. a) 3. b) ∞ . c) 0.

6. a) 1 ; ∞ ; $1/2$; $-1/2$. b) ∞ ; $-3/2$; ∞ ; $-1/12$. c) ∞ ; ∞ ; -2 ; 0 .

7. a) Sí; 1. b) No. c) Sí; 0.

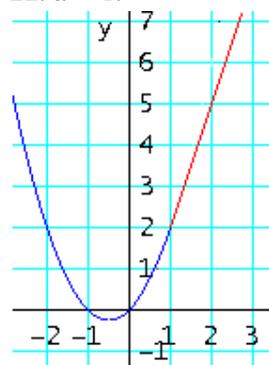
8. a) $x = -1$. b) $x = -2$, $x = 0$. c) $x = -1$, $x = 1$. En $x = 1$ puede evitarse definiendo $f(1) = -1/2$.

9. a) AV: $x = -1$; AH: $y = 2$. b) AV: $x = -2$, $x = 0$; AH: $y = 0$. c) AV: $x = 1$; AO: $y = x + 1$.

10. AV: $x = 0$ y $x = 3$. Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$; Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$; Si $x \rightarrow 3^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$; Si $x \rightarrow 3^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

AH: $y = 0$, Por ambos lados la curva va por encima de la asíntota.

11. $a = 1$.



12. a) -1 . b) 2. c) $-5/6$.