Ejercicios resueltos.

1.- Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican: *a)* $f(x)=\dfrac{2}{x}$ *en x = - 1; b)* $f(x)=\dfrac{5x-4}{2x+1}$ *en x = 1*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x}=2x^{-1}$; $\quad f'(x)=-2x^{-2}=\dfrac{-2}{x^2}$

$f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1)^2}=\dfrac{-2}{1}=-2<0\Rightarrow$ La función es decreciente en *x = -1*

b) $f(x)=\dfrac{5x-4}{2x+1}$

$$f'(x)=\frac{5(2x+1)-2(5x-4)}{(2x+1)^2}=\frac{10x+5-10x+8}{(2x+1)^2}=\frac{13}{(2x+1)^2}$$

$f'(1)=\dfrac{13}{(2.1+1)^2}=\dfrac{13}{9}>0\Rightarrow$ La función es creciente en *x = 1*

Obsérvese que en la derivada obtenida el numerador es positivo y el denominador es siempre positivo por estar elevado al cuadrado por lo que la función es creciente no solo en *x = 1* sino en todos los puntos de su dominio.

2.- Estudia la monotonía de la función $y = xe^x$

Solución:

$y = xe^x$

$y' = 1.e^x + e^x.x = e^x(1+x)$

$e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \\ ó \\ 1+x = 0 \end{cases}$

e^x es siempre mayor que cero, luego la única solución posible se obtiene de la ecuación

$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

El dominio de la función dada es R por tratarse del producto de una exponencial (de dominio R) y una polinómica (de dominio también R).

Dividiendo el dominio por el punto – 1 se obtienen dos intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$

Estudiamos el signo de la derivada en un punto cualquiera de cada intervalo:

Para $x = -2$, $y'(-2) = e^{-2}(1-2) = \frac{1}{e^2}.(-1) = -\frac{1}{e^2} < 0$ (negativa)

Para $x = 0$, $y'(0) = e^0(1+0) = 1 > 0$ (positiva)

Se obtienen así los siguientes intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Intervalos	(-∞, -1)	(-1, +∞)
Signo de la derivada	-	+
Función	↘	↗

3.- Halla los valores de *a* y *b* en la función $f(x) = x^2 + ax + b$ sabiendo que pasa por el punto *P(-2, 1)* y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x = -3*

Solución:

Si pasa por el punto *(-2, 1)*, para *x = -2* la función vale *1*, es decir,

$(-2)^2 + a(-2) + b = 1 \Rightarrow -2a + b = -3$

Como tiene un extremo para *x = -3* su derivada se anula en dicho punto, es decir,

$f'(x) = 2x + a \Rightarrow 2(-3) + a = 0 \Rightarrow a = 6$

Y sustituyendo en la ecuación $-2a + b = -3$ se obtiene el valor de *b*

$-12 + b = -3 \Rightarrow b = 9$

4.- Halla *a, b* y *c* en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que el punto *P(0,4)* es un máximo y el punto *Q(2,0)* un mínimo.

Solución:

La función pasa por *(0,4)*, por tanto, $a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 4 \Rightarrow d = 4$

La función pasa por *(2,0)*, por tanto, $a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d = 0$

Luego $8a + 4b + 2c + d = 0$

Por otra parte, el punto *P(0, 4)* es un máximo lo que indica que su derivada se anula para *x = 0*, es decir, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f'(0) = 3a.0^2 + 2b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Como el punto *Q(2,0)* es un mínimo, su derivada se anula para *x = 2*:

$3a.2^2 + 2b.2 + c = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

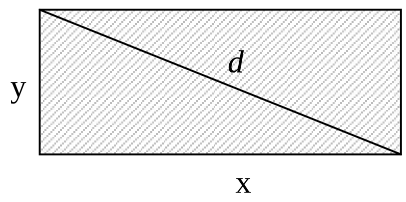
Formando un sistema con las 4 ecuaciones obtenidas resulta:

$$\begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1;\ \ b = -3$$

5.- Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?.

Solución:



Perímetro: $2x + 2y = 12 \Rightarrow x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x$ (condición que se ha de cumplir)

Función a minimizar: $x^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (6-x)^2}$

Es decir, $d(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$ que es la función a estudiar.

$$d'(x) = \frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}} = \frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12x+36}}$$

Igualando $d'(x)$ a cero y resolviendo la ecuación resultante se obtiene $x = 3$

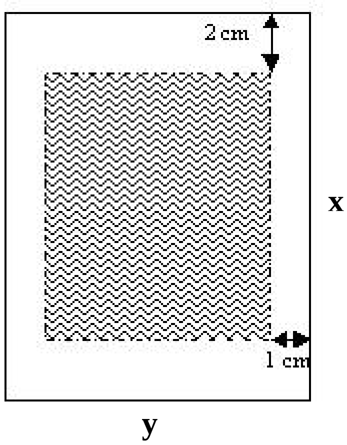
Segunda derivada: $d''(x) = \dfrac{2\sqrt{2x^2-12x+36} - (2x-6)\cdot\dfrac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}}{2x^2-12x+36}$

Valor de la segunda derivada para $x = 3$:

$d''(3) = \dfrac{2\sqrt{2.3^2 - 12\cdot 3 + 36} - 0}{2.3^2 - 12\cdot 3 + 36} = \dfrac{2\sqrt{2.3^2}}{2.3^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} > 0$ (mínimo, se trata de un cuadrado)

6.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución:



Condición que se tiene que dar: 18 cm^2 de texto impreso, es decir, $(x-4)(y-2)=18$

$$y-2=\frac{18}{x-4}\Rightarrow y=\frac{10+2x}{x-4}$$

Función a minimizar: Superficie = $x.y = x.\frac{10+2x}{x-4}=\frac{10x+2x^2}{x-4}$, es decir,

$S=\frac{10x+2x^2}{x-4}$. Derivando, $S'=\frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2}$. Si hacemos $S'=0$ entonces

$$2x^2-16x-40=0\Rightarrow x^2-8x-20=0\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}=\begin{cases}10\\-2\end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido.

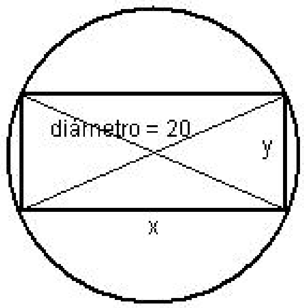
$$S''=\frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4};\quad S''(10)=\frac{24.36-0}{6^4}>0$$

Para x = 10, la 2ª derivada es positiva, luego es un mínimo.

La hoja de papel tiene que ser de 10x5

7.- Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio.

Solución:



Condición que se tiene que dar: $x^2 + y^2 = 400 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$

Función a maximizar: Área = $x.y = x\sqrt{400 - x^2}$; $A = x\sqrt{400 - x^2}$

$$A' = 1.\sqrt{400 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}.x = \sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

Si hacemos $A' = 0$, $400 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$

Es claro que la solución es $x = 10\sqrt{2}$ ya que la negativa no tiene sentido.

Comprobaremos que es máximo calculando la segunda derivada:

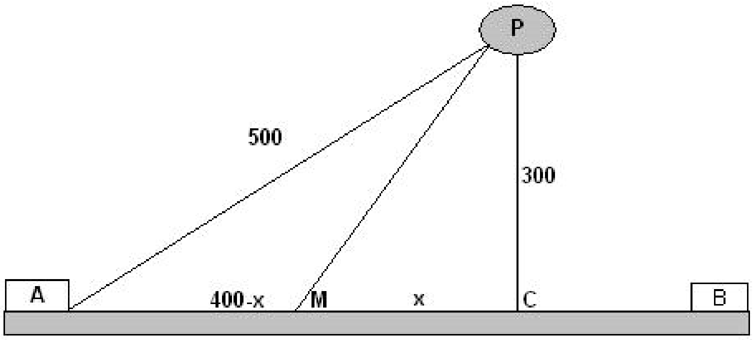
$$A'' = \frac{-4x\sqrt{400 - x^2} - \dfrac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}(400 - 2x^2)}{400 - x^2}$$

Para $x = 10\sqrt{2}$, $A''(10\sqrt{2}) = \dfrac{-4.10\sqrt{2}\sqrt{400 - 200} - 0}{200} = -\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{200}}{5} < 0$ (máximo)

Si $x = 10\sqrt{2}$, $y = \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$. Se trata de un cuadrado.

8.- En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km. De distancia de A. Puede aprovecha para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km., determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

<u>Solución:</u>



La ruta a seguir es AMP.

Aplicando Pitágoras en el triángulo ACP se obtiene: $\overline{AC} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$

En el triángulo MCP se obtiene que $\overline{MP} = \sqrt{x^2 + 300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia AM + MP es:

$$t = \frac{4 - x}{100} + \frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{60}.$$

Derivando, $t' = \frac{-1}{100} + \frac{1}{60}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}}$

Si hacemos $t' = 0$, $\frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{1}{100}$

Es decir, $10x = 6\sqrt{x^2 + 300^2} \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 36.300^2 \Rightarrow$

$$64x^2 = 36.300^2 \Rightarrow x^2 = \frac{36.300^2}{64} \Rightarrow x = \pm 225$$

La solución negativa no tiene sentido. $AM = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 Km. de la ciudad A.

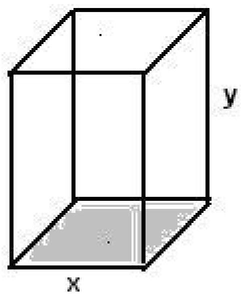
Podemos comprobar que es mínimo hallando la segunda derivada:

$$t'' = \frac{1.60\sqrt{x^2 + 300^2} - 60.\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}}}{60^2(x^2 + 300^2)} = \frac{\frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{\sqrt{x^2 + 300^2}}}{60^2(x^2 + 300^2)} \Rightarrow$$

$t'' = \frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{60^2(x^2 + 300^2)\sqrt{x^2 + 300^2}}$. Para x = 225, $t''(225) > 0$ (mínimo)

9.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4.000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



La función que tenemos que minimizar es el área del depósito: $A = x^2 + 4xy$

Con la condición de que el volumen $V = x^2 y$ sea de 4000 litros.

$x^2 y = 4000 \Rightarrow y = \dfrac{4000}{x^2}$, por tanto, $A = x^2 + 4x.\dfrac{4000}{x^2}$

$A = x^2 + \dfrac{16000}{x}$ (función a minimizar)

$A = x^2 + 1600x^{-1}$; $A' = 2x - 1.16000x^{-2} = 2x - \dfrac{16000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 16000}{x^2}$

Si hacemos $A' = 0$, $2x^3 - 16000 = 0 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$

Segundo derivada: $A'' = \dfrac{6x^2.x^2 - 2x(2x^3 - 16000)}{x^4} = \dfrac{2x^3 + 32000}{x^3}$

Para $x = 20$, $A''(20) = \dfrac{2.20^3 + 32000}{20^3} > 0 \Rightarrow$ para $x = 20$ la superficie es mínima.

Si $x = 20$, $y = \dfrac{4000}{20^2} = 10$

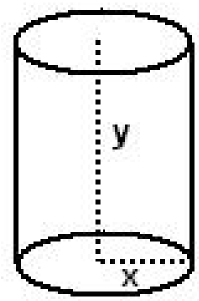
luego la caja debe tener *20 dm.* de lado y *10 dm.* de altura.

10.- Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.

Solución:

El área total de un cilindro es:

$\text{Área} = 2\pi \times radio \times generatriz + el\ área\ de\ las\ dos\ bases(\pi \times radio^2 + \pi \times radio^2)$



es decir, $A = 2\pi.x.y + 2\pi.x^2 = 150$ (Condición que se tiene que cumplir)

Y de aquí, $\pi.x.y + \pi.x^2 = 75 \Rightarrow y = \dfrac{75 - \pi x^2}{\pi x}$

El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura, por tanto,

$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \dfrac{75 - \pi x^2}{\pi x} = 75x - \pi.x^3$ (función a maximizar)

Derivando, $V' = 75 - 3\pi.x^2$

Si hacemos $V' = 0$, $75 - 3\pi.x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{75}{3\pi} = \dfrac{25}{\pi} \Rightarrow x = \pm\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$

Segunda derivada: $V'' = -6\pi.x$

$V''\left(\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi.\dfrac{5}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{-30\pi.\sqrt{\pi}}{\pi} = -30\sqrt{\pi} < 0$

Para $x = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$ el volumen es máximo.

$$y = \frac{75 - \pi\dfrac{25}{\pi}}{\pi.\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50}{\dfrac{5\pi}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50\sqrt{\pi}}{5\pi} = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$

Ejercicios propuestos

1.- Estudia la monotonía de la función $f(x) = (x-1)e^x$

2.- Estudia la monotonía de la función $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 3)$ y determina los máximos y mínimos relativos.

3.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

4.- Halla los máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{x}{\ln x}$

(Solución: mínimo para x = e)

5.- Estudia la curvatura de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ y determina los puntos de inflexión.

6.- Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ en su punto de inflexión.

(Solución: y = - 6x + 6)

7.- Halla los valores de **b** y **c** para que la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + 1$ tenga en el punto (0, 1) una inflexión y la pendiente de la recta tangente en dicho punto valga 1.

(Solución: b = 0; c = 1)

8.- Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

9.- Se desea construir un marco rectangular para una ventana de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical es a 30 € el metro. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste de marco sea mínimo.

10.- Considérese un prisma recto de base rectangular, con dos de los lados de ese rectángulo de longitud doble que los otros dos, tal como se indica en la figura. Halla las dimensiones que ha de tener este prisma para que el área total sea de 12 metros cuadrados y que con estas condiciones tenga volumen máximo.

(Solución: las dimensiones son 1, 2 y 4/3)