INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

1. El peso de los bebés al nacer sigue una ley normal de media $\mu = 3200$ gramos y desviación típica $\sigma = 312$.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un niño pese más de 3,4 kg al nacer?
b) Para una muestra de 169 niños, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio sea menor que 3150 gramos?
c) Encuentra el intervalo donde se encuentra el 95 % de todos los pesos medios de las muestras de 169 recién nacidos.

Solución:

a) La distribución N (3200, 312) se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Por tanto:

$$P\,(X < 3400) = P\left(Z < \frac{3400-3200}{312}\right) = P\,(Z > 0{,}64) = 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$$

b) La media de las muestras de tamaño n obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se distribuye según una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En nuestro caso: $N\left(3200, \dfrac{312}{\sqrt{169}}\right) = N\,(3200, 24)$. Con esto:

$$P\,(\overline{X} < 3150) = P\left(Z < \frac{3150-3200}{24}\right) = P\,(Z < -2{,}08) = 1 - P\,(Z < 2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$$

c) El intervalo de confianza para el peso medio vendrá dado por:

$$\left(3200 - Z_{0,025}\frac{312}{\sqrt{169}}, 3200 + Z_{0,025}\frac{312}{\sqrt{169}}\right) = (3200 - 1{,}96 \cdot 24,\ 3200 + 1{,}96 \cdot 24) =$$
$$= (3152{,}96,\ 3247{,}04)$$

2. Un estudio realizado sobre 144 usuarios de automóviles revela que la media anual de kilómetros recorridos es de 18000 km. Si el número de km. recorridos anualmente sigue una distribución normal con desviación típica de 2000 km.
a) Calcula, con una probabilidad del 97 %, entre qué valores estará la media del número de km. recorridos anualmente por la población total de usuarios de automóviles.
b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución:

a) Se trata de calcular el intervalo de confianza de la media poblacional de los kilómetros recorridos. Este intervalo, para las muestras de tamaño muestral n de media $\overline{x}$ y desviación típica σ, es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\overline{x} = 18000$, $\sigma = 2000$, $n = 144$ y, para el 97 % de nivel de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2{,}17$ se tiene:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(18000 - 2{,}17\frac{2000}{\sqrt{144}}, 18000 + 2{,}17\frac{2000}{\sqrt{144}}\right) = (17638{,}3;\ 18361{,}7)$$

b) Esto significa que el la media de km. recorridos por la población de usuarios de esos coches estará entre 17638,3 y 18361,7, con una probabilidad del 0,97, o del 97 % si quiere decirse así.

3. Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos:

88 90 90 86 87 88 91 92 89

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:
El intervalo de confianza para la población es:

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Siendo $\bar{x}$ la media muestral, σ la desviación típica, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1-\alpha$.
La media muestral es:

$$\bar{x}=\frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9}=89$$

Por tanto, como $\sigma = 1,8$, $n = 9$ y $Z_{\alpha/2} = 1,96$, el intervalo de confianza será:

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(89-1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}},89+1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right)=(87,824;\ 90,176)$$

4. Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x}$ = 8,1 días; s = 9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica s es:

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$.
Para $\bar{x}$ = 8,1, s = 9, n = 800 y, para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, se tiene:

$$\left(8,1-1,96\frac{9}{\sqrt{800}},8,1+1,96\frac{9}{\sqrt{800}}\right)=(7,5;\ 8,7)$$

La estancia media está entre 7,5 y 8,7 días.

5. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95 % ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372,6, 392,2).
a) Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.
b) ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86,9 %?

Solución:

a) El intervalo de confianza, para las muestras de tamaño *n*, y de media $\bar{x}$, es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde σ es la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$. Si tenemos en cuenta que $\sigma = 60 = \sqrt{3600}$, y que $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, entonces:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 372{,}6$$

$$\bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 392{,}2$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene:

$$\bar{x} = 382{,}4 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad n = 144$$

b) El error de estimación es $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para el 86,9 % se tiene:

$$1 - \alpha = 0{,}869 \Rightarrow \alpha = 0{,}131 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}0655 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9345 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}51$$

Como $n = 225$ y $\sigma = 60$, entonces, el error pedido vale:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}51 \cdot \frac{60}{\sqrt{225}} = 6{,}04$$

6. En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.

a) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con un 97 % de confianza, para la media de la población.

b) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

Solución:

a) El intervalo de confianza, para las muestras de tamaño muestral *n* de media $\bar{x}$, es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde σ es la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para un nivel de confianza de $1 - \alpha$.

En este caso:

$$\bar{x} = 50 \qquad \sigma = 2 \qquad Z_{\alpha/2} = 2{,}17 \qquad \text{y} \qquad n = 400$$

El intervalo será:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(50 - 2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}}, 50 + 2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (49{,}783;\ 50{,}217)$$

b) La amplitud del intervalo es:

$$2 \cdot Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si se quiere que sea menor que 1:

$$2{,}17\ \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > 4 \cdot 2{,}17 = 8{,}68 \quad \Rightarrow \quad n > 75{,}34$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser 76.

7. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros:
a) Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n y de media $\overline{x}$, es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.
Para $\overline{x} = 1480$, $\sigma = 250$, $n = 625$ y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1{,}645$, este intervalo es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1480 - 1{,}645\frac{250}{\sqrt{625}}, 1480 + 1{,}645\frac{250}{\sqrt{625}}\right) = (1463{,}55,\ 1496{,}45)$$

b) El error viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si se desea que sea menor que 10, para el 99 % de confianza ($Z_{\alpha/2} = 2{,}575$) y $\sigma = 250$, se tendrá:

$$2{,}575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} < 10 \quad \Rightarrow \quad n > (2{,}575 \cdot 25)^2 = 4144{,}14$$

El tamaño mínimo muestral es $n = 4145$.

8. Un experto en gestión de calidad quiere estudiar el tiempo promedio que se necesita para hacer tres perforaciones en una pieza metálica. Se calcula el tiempo promedio de una muestra aleatoria de 36 trabajadores, resultando 2,6 segundos. Suponiendo que el tiempo de perforación se distribuye según una normal con desviación típica 0,3 segundos:
a) Encontrar un intervalo de confianza del 99,4 % para dicho tiempo promedio de perforación.
b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución:
a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para un nivel de confianza de $1 - \alpha$.
Para $\overline{x} = 2{,}6$, $\sigma = 0{,}3$, $n = 36$ y, para el 99,4 % de probabilidad, $Z_{\alpha/2} = 2{,}75$. Por tanto:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2{,}6 - 2{,}75\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}, 2{,}6 - 2{,}75\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right) = (2{,}4625,\ 2{,}7375)$$

b) Esto significa que el tiempo promedio del 99,4 % de las muestras de tamaño 36 estará entre 2,4625 segundos y 2,7375 segundos. O lo que es lo mismo, la probabilidad de que una muestra de 36 trabajadores emplee un tiempo promedio entre 2,4625 y 2,7375 segundos es 0,994.

9. Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66; 8,34). Calcule la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explique cada uno de los pasos realizados.

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n, de media $\overline{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$.
En este caso se sabe que $\sigma = 3$ y $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$ (95 % de confianza: $1-\alpha = 0{,}95$). Por tanto:

$$\left(\overline{x} - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}}, \overline{x} + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = (6{,}66;\ 8{,}34)$$

Luego:

$$\overline{x} - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}} = 6{,}66$$

$$\overline{x} + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}} = 8{,}34$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se obtiene que:

$$n = 49 \qquad \overline{x} = 7{,}5$$

Nota: La media se podría haber calculado sin conocer n, pues al ser el intervalo de confianza simétrico respecto de la media, esta es la media aritmética de los extremos de ese intervalo:

$$\overline{x} = \frac{6{,}66 + 8{,}34}{2} = 7{,}5$$

10. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.
a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.
b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

Solución:
a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\overline{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1-\alpha$.
Para $\overline{x} = 5$, $\sigma = 2$, $n = 10000$ y, para el 80 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1{,}28$.

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5 - 1{,}28\frac{2}{\sqrt{10000}}, 5 + 1{,}28\frac{2}{\sqrt{10000}}\right) = (4{,}9744;\ 5{,}0256)$$

b) El error admitido, E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, y $E < 0,25$ se tendrá:

$$1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} > 15,68 \Rightarrow n \geq 15,68^2 = 245,8$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 246 personas.

11. Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de texto. Para ello, se elige una muestra aleatoria de 121 libros de texto encontrando que tienen un precio medio de 23 euros. Si sabemos que los precios de los libros de texto siguen una distribución normal con desviación típica de 5 euros:

a) Encontrar un intervalo de confianza al 98,8 % para el precio medio de los libros de texto.

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido.

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza (probabilidad) de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 23$, $\sigma = 5$, $n = 121$ y, para el 98,8 % de probabilidad, $Z_{\alpha/2} = 2,51$. Por tanto el intervalo será:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(23 - 2,51\frac{5}{\sqrt{121}}, 23 + 2,51\frac{5}{\sqrt{121}}\right) \approx (21,86; 24,14)$$

b) Esto significa que el precio promedio del 98,8 % de las muestras de tamaño 121 libros estará entre 21,86 y 24,14 euros. O lo que es lo mismo, la probabilidad de que el precio medio de una muestra de 121 libros esté entre 21,86 y 24,14 euros es 0,988.

12. Un fabricante de lámparas de bajo consumo sabe que el tiempo de duración, en horas, de las lámparas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 180 horas. Con una muestra de dichas lámparas, elegida al azar, y con un nivel de confianza del 97 %, obtuvo para la media el intervalo de confianza (10072,1, 10127,9).

a) Calcular el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de muestra utilizado.

b) Si se quiere que el error de su estimación sea como máximo de 24 horas y se utiliza una muestra de tamaño 225, ¿cuál será entonces el nivel de confianza?

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n, de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$. Por tanto, la media muestral se encuentra en el centro del intervalo dado. Su valor será:

$$\bar{x} = \frac{10072,1 + 10127,9}{2} = 10100 \text{ horas}$$

Como:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10072{,}1 \quad \Rightarrow \quad 10100 - 2{,}17\,\frac{180}{\sqrt{n}} = 10072{,}1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = 14 \quad \Rightarrow \quad n = 196$$

b) El error viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Como se desea que $E \le 24$, para $n = 225$ y $\sigma = 180$ se tendrá:

$$24 \ge Z_{\alpha/2}\frac{180}{\sqrt{225}} \quad \Rightarrow \quad \frac{24\cdot 15}{180} \ge Z_{\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} \le 2$$

Para el valor de $Z_{\alpha/2} = 2$ se tiene que:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9772 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}0456$$

Por tanto, el nivel de confianza será de $100 \cdot (1 - 0{,}0456)$ % = 95,44 %

13. La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$. En este caso, se tiene $\bar{x} = 31{,}1$; $\sigma = 5$; el tamaño muestral es $n = 10$; y $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por tanto, el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(31{,}1 - 1{,}96\frac{5}{\sqrt{10}}, 31{,}1 + 1{,}96\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (28,\ 34{,}2)$$

14. Tras múltiples observaciones se ha comprobado que el número de pulsaciones de los varones de 20 a 25 años se distribuye normalmente con una media de 72 pulsaciones y una desviación típica igual a 4. Si una muestra de 100 deportistas varones de esa edad da una media de 64 pulsaciones.

a) ¿Queda el valor de 72 pulsaciones dentro del intervalo de confianza para la media muestral al 95% de confianza?

b) ¿Debemos aceptar la hipótesis de que hay diferencia significativa entre el número de pulsaciones de los deportistas y el número de pulsaciones de los varones en general, con un nivel de significación de 0,05?

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo n el tamaño muestral, $\bar{x}$ la media de la muestra, σ la desviación típica y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso, para $\overline{x}$ = 64, σ = 4, n = 100 y, para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, se tiene:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(64 - 1,96\frac{4}{\sqrt{100}}, 64 + 1,96\frac{4}{\sqrt{100}}\right) = (63,216;\ 64,784)$$

Por tanto, 72 queda fuera del intervalo hallado.

b) Como 72 cae fuera del intervalo de confianza anterior hay que aceptar la hipótesis de que hay diferencia significativa entre el número de pulsaciones de los deportistas y el número de pulsaciones de los varones en general, con un nivel de significación de 0,05.

15. La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7,5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza (21,06; 26,94) para la longitud media.
a) Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.
b) Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Solución:
a) El intervalo de confianza es simétrico respecto de la media. Por tanto, la media viene dada por su punto medio: $\overline{x} = \dfrac{21,06 + 26,94}{2}$ = 24 m.

b) El intervalo de confianza, para las muestras de tamaño muestral n de media $\overline{x}$, es:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.
Para $\overline{x}$ = 24, σ = 7,5 y n = 25 se tiene:

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(24 - Z_{\alpha/2}\frac{7,5}{\sqrt{25}}, 24 + Z_{\alpha/2}\frac{7,5}{\sqrt{25}}\right) = (21,06;\ 26,94) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ Z_{\alpha/2}\frac{7,5}{\sqrt{25}} = 2,94 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} = 1,96$$

De aquí se deduce que el nivel de confianza es del 95%.

16. Tomada al azar una muestra de 500 personas de una determinada comunidad, se encontró que 300 leían la prensa regularmente.
a) Hallar, con una confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de lectores ente las personas de esa comunidad.
b) A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,05% con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución:
a) El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q}$ = 1 − $\hat{p}$, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor

correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.
En nuestro caso, para el 90 % de confianza (significación 0,1):

$$Z_{\alpha/2} = 1{,}645 \qquad \hat{p} = 300/500 = 0{,}6 \qquad \hat{q} = 0{,}4 \qquad n = 500$$

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}6 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{500}}; 0{,}6 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{500}}\right) = (0{,}564;\ 0{,}636)$$

b) El tamaño muestral se obtiene aplicando la formula $n = (Z_{\alpha/2})^2\ \frac{\hat{p}\hat{q}}{E^2}$, siendo E el error admitido.

En nuestro caso:

$$n = (1{,}645)^2\ \frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{0{,}05^2} = 259{,}8$$

El tamaño muestral debe ser de 260 individuos.

17. En el Juzgado de cierta ciudad se presentaron en el año 2005 un total de 5500 denuncias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 5 % de ellas. Entre las denuncias seleccionadas se determinó que 55 habían sido producidas por violencia doméstica. Determinar, justificando la respuesta:
a) La estimación puntual que podríamos dar para el porcentaje de denuncias por violencia doméstica en esa ciudad en el año 2005.
b) El error máximo que cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:
a) El tamaño muestral fue de $5500 \cdot 0{,}05 = 275$ denuncias. De ellas, 55 habían sido producidas por violencia doméstica, luego la proporción de denuncias por violencia doméstica fue: $\frac{55}{275} = 0{,}20$

esto es, el 20 %.

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, siendo: $\hat{p} = 20$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}80$, $n = 275$

y $Z_{\alpha/2}$ el valor de la variable normal correspondiente a una confianza $1 - \alpha \Rightarrow Z_{0{,}005} = 2{,}575$.
Por tanto:

$$E = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}20\cdot 0{,}80}{275}} = 2{,}575 \cdot 0{,}0241 = 0{,}062$$

Se puede cometer un error máximo del 6,2 %. Esto es, el porcentaje de denuncias por violencia doméstica pertenece al intervalo (20 − 6,2, 20 + 6,2) = (13,8; 26,2), es decir, estará entre el 13,8 % y el 26,2 %.

18. De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %.

Solución:
La proporción de la muestra es $\hat{p} = \frac{630}{2100} = 0{,}30$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para el 99 % de confianza (significación 0,01) $Z_{\alpha/2} = 2{,}575$, $\hat{p} = 0{,}30$; $\hat{q} = 0{,}70$; y $n = 2100$. Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}30 - 2{,}575\cdot\sqrt{\frac{0{,}30\cdot 0{,}70}{2100}}, 0{,}30 + 2{,}575\cdot\sqrt{\frac{0{,}30\cdot 0{,}70}{2100}}\right) =$$

$$= (0{,}30 - 0{,}02575,\ 0{,}30 + 0{,}02575) \approx (0{,}274,\ 0{,}326)$$

19. Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de la universidad se encontró que un tercio hablaban el idioma inglés.

a) Hallar, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de alumnos que hablan el idioma inglés entre los alumnos de la universidad.

a) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

Solución:

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para el 90 % de confianza (significación 0,10):

$Z_{\alpha/2} = 1{,}645$ $\qquad \hat{p} = 1/3$ $\qquad \hat{q} = 2/3$ $\qquad$ y $\qquad n = 60$

el intervalo de confianza será:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(\frac{1}{3} - 1{,}645\sqrt{\frac{1/3\cdot 2/3}{60}}, \frac{1}{3} + 1{,}645\sqrt{\frac{1/3\cdot 2/3}{60}}\right) = (0{,}23;\ 0{,}43)$$

b) Sabemos que el error admitido es $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow n = (Z_{\alpha/2})^2\,\frac{\hat{p}\hat{q}}{E^2}$

Como se desea que $E = 0{,}01 \Rightarrow n = (1{,}645)^2\,\frac{1/3\cdot 2/3}{0{,}01^2} \Rightarrow n = 6013{,}4$

El tamaño muestral debe ser de 6014 o más.

20. Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Estimar la probabilidad de cruz mediante un intervalo de confianza del 95 %. Basándonos en la experiencia anterior, se pretende estimar la probabilidad de cruz con un error menor que 0,002 y un nivel de confianza del 95 %. ¿Cuántas veces hemos de lanzar la moneda?

Solución:

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, la proporción de cruz en la muestra es

$$\hat{p} = 0{,}38 \qquad \hat{q} = 0{,}62 \qquad Z_{\alpha/2} = 1{,}96 \qquad \text{y} \qquad n = 100$$

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}38 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38\cdot 0{,}62}{100}}, 0{,}38 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}38\cdot 0{,}62}{100}}\right) = (0{,}285;\ 0{,}475)$$

El error que admitimos es $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}095$; mucho mayor que 0,002.

Si se desea que $E < 0{,}002$ habrá que despejar n de la expresión del error:

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = (Z_{\alpha/2})^2\ \frac{\hat{p}\hat{q}}{E^2} \quad \Rightarrow \quad n = (1{,}96)^2 \cdot \frac{0{,}38\cdot 0{,}62}{0{,}002^2} = 226270{,}24$$

Hay que lanzar la moneda 226271 veces, al menos. (Obviamente es un objetivo casi imposible; pero si se pide un error prácticamente nulo, como lo es $E = 0{,}002$, habrá que asumir los costes).