PROBLEMA RESUELTO 1

Una persona lanza un objeto desde el suelo verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 20 m/s. Calcula:

a) La altura máxima alcanzada.

b) El tiempo que tarda en caer al suelo desde el instante del lanzamiento.

c) La distancia recorrida en el primer segundo de su movimiento.

Planteamiento y resolución

El problema trata un MRUA. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, *g*, y, por tanto, de sentido negativo.

a) El objeto comienza su movimiento ascendiendo hasta que para, velocidad nula, y comienza caer. El tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima es el tiempo que pasa hasta que el objeto para, $v_1 = 0$ m/s:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t_1 \rightarrow 0 = 20 - 9{,}8 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = 2{,}04 \text{ s}$$

Y la altura máxima alcanzada es:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \rightarrow y_1 = 0 + 20 \text{ m/s} \cdot 2{,}04 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}04^2 \text{ s}^2 = 20{,}4 \text{ m}$$

b) El objeto tarda el mismo tiempo en subir que en bajar. Por tanto, el momento en que el objeto cae al suelo corresponde a: $t_2 = 2 \cdot 2{,}04 \text{ s} = 4{,}08$ s.

En efecto, las soluciones de la ecuación:

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \rightarrow 0 = 0 + 20 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_2^3$$

Son 0 segundos, el momento del lanzamiento, y $t_2 = 4{,}08$ s, el momento de la caída.

c) La distancia, *d*, que recorre durante el primer segundo del lanzamiento es:

$$d = y - y_0 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow d = 20 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1^2 \text{ s}^2 = 15{,}1 \text{ m}$$

ACTIVIDADES

1 **Un coche acelera al ponerse el semáforo en verde. Después de recorrer 100 m, su velocidad es de 70 km/h. Calcula:**

a) La aceleración del movimiento.

b) La velocidad a 50 m del semáforo.

Sol.: a) 1,89 m/s^2; b) 13,75 m/s (49,49 km/h).

2 **Un niño deja caer una pelota desde su ventana situada a 15 m del suelo.**

a) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad llega al suelo?

Sol.: a) 1,75 s; b) 17,15 m/s.

3 **Un coche que circula por una carretera a 80 km/h frena al ver un obstáculo situado a 50 m. ¿Cuál debe ser la deceleración para que el coche no choque con el obstáculo?**

Sol.: Mayor que 4,94 m/s^2.

4 **Desde un punto situado a 5 m de altura se ha lanzado un objeto hacia arriba. Sabiendo que ha tardado 6 s en llegar al suelo, calcula:**

a) La velocidad con la que fue lanzado.

b) La altura máxima alcanzada.

Sol.: a) 28,57 m/s; b) 41,64 m.

5 **Un ciclista necesita 10 s para pasar de 0 a 60 km/h. Calcula:**

a) La aceleración obtenida.

b) La distancia recorrida.

c) La velocidad a los 8 s de comenzar a moverse.

Sol.: a) 1,67 m/s^2;
b) 83,33 m;
c) 13,33 m/s (48 km/h).

PROBLEMA RESUELTO 2

El caño de una fuente está inclinado 60° sobre la horizontal. Si el agua sale del caño con una velocidad inicial de 10 m/s:

a) ¿Qué dibujo forma el chorro de agua?

b) ¿Qué altura máxima alcanza el agua?

c) ¿A qué distancia del caño hay que colocar el sumidero?

d) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del agua cuando esta cae al sumidero?

Planteamiento y resolución

Fijamos el sistema de referencia del problema con origen en el caño, direcciones vertical y horizontal y sentidos hacia arriba y según el avance del movimiento. Entonces, en las unidades del SI $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(v_{0x}, v_{0y}) = (10 \cdot \cos 60°, 10 \cdot \text{sen } 60°) = (5, 8{,}67)$, y la aceleración de la gravedad tiene solo componente vertical con sentido negativo.

a) El chorro dibuja en el aire una parábola.

b) Para calcular la altura máxima hay que fijarse en la componente vertical del movimiento. Como la componente vertical de la velocidad en ese punto es cero, el tiempo que tarda en alcanzar ese punto es:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow 0 = 8{,}67 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 0{,}88 \text{ s}$$

En ese tiempo el agua sube hasta una altura:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 0 + 8{,}67 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}88^2 \text{ s}^2 = 3{,}8 \text{ m}$$

c) Durante su trayectoria el agua avanza en horizontal un espacio:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 18 \text{ m} = 0 + 5 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} = 4{,}4 \text{ m}$$

Si no queremos que el agua caiga sobre el suelo, sino que queremos recogerla para reciclarla, el sumidero debe estar a 4 m y 40 cm del caño.

d) La componente horizontal de la velocidad no cambia durante su movimiento, y la componente vertical de la velocidad final es igual, pero de sentido contrario a la componente vertical de la velocidad inicial. Por tanto, la velocidad final es:

$$(v_{fx}, v_{fy}) = (5, -8{,}67) \text{ m/s}$$

Y su módulo coincide con el de la velocidad inicial: 10 m/s.

ACTIVIDADES

1 **Una esquiadora realiza un salto en una arista inclinada 25° sobre la horizontal y con un desnivel de 10 m. Si la velocidad con la que empieza el vuelo es 20 m/s, calcula la altura máxima alcanzada y el punto del impacto.**

Sol.: 3,65 m; 45,86 m.

2 **Un niño deja caer un coche por el borde de una mesa de 70 cm de altura después de empujarlo sobre ella con una velocidad de 30 cm/s. ¿A qué distancia de la mesa cae el coche?**

Sol.: 11,4 cm.

3 **Una estudiante se monta en una montaña rusa con varias vueltas completas. Cuando su coche empieza la primera vuelta y a 20 m del suelo se inclina 100° sobre la horizontal, se le caen las llaves del bolsillo de la camisa. Si la velocidad en ese momento es de 15 m/s, ¿a qué distancia de ese punto tendrá que buscar las llaves?**

Sol.: 10,5 m.

4 **¿Cuánto tiempo dura la caída desde el trampolín, de 10 m, de los nadadores de alta competición que se elevan hasta tres metros por encima del trampolín en su salto?**

Sol.: 2,41 s.

PROBLEMA RESUELTO 3

Una rueda comienza a girar con aceleración angular constante y al cabo de 3 s alcanza las 300 revoluciones por minuto. Si su radio es de 10 cm, calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad lineal que lleva un punto del borde de la rueda a los 3 s.

Planteamiento y resolución

El movimiento de la rueda es circular uniformemente acelerado. En 3 s desde el reposo alcanza una velocidad angular de:

$$\omega = \frac{300\ \cancel{\text{rev}}}{1\ \cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 31{,}42\ \text{rad/s}$$

a) La aceleración angular de la rueda es:

$$\omega = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{31{,}42\ \text{rad/s} - 0\ \text{rad/s}}{3\ \text{s}} = 10{,}47\ \text{rad/s}^2$$

b) La velocidad lineal está relacionada con la angular mediante el radio, así que:

$$v = \omega \cdot t = 31{,}42\ \text{rad/s} \cdot 0{,}1\ \text{s} = 3{,}14\ \text{m/s}$$

ACTIVIDADES

1 **Un volante que gira a 10 rad/s de velocidad angular se detiene dando 3 vueltas desde el instante que comienza a frenar hasta quedar completamente en reposo. Calcula:**

a) La aceleración angular.

b) El tiempo que tarda en detenerse.

Sol.: a) $-2{,}65$ rad/s^2; b) 3,77 s.

2 **Un disco gira a 2000 revoluciones por minuto de velocidad constante. Si su radio es de 8 cm, calcula:**

a) La distancia recorrida por un punto del borde en 5 s.

b) El tiempo que tarda en girar un ángulo de 2π radianes.

Sol.: $s = 83{,}78$ m; $t = 0{,}03$ s.

3 **Una hélice pasa de 50 a 200 revoluciones por minuto en un tiempo de 6 s. Calcula:**

a) La aceleración angular.

b) El número de vueltas dadas en esos 6 s.

Sol.: a) 2,62 rad/s^2; b) 12,51 vueltas.

4 **Un tiovivo comienza a dar vueltas. Primero con una aceleración angular de 0,2 rad/s^2 durante 8 s. Después manteniendo la velocidad de giro durante 20 s. Calcula el ángulo total girado.**

Sol.: 38,4 radianes.

5 **Un punto está situado a 30 cm del centro de una rueda. Esta empieza a girar alcanzando la velocidad angular máxima en 5 s. Sabiendo que en ese momento el punto se mueve a una velocidad de 1 m/s, calcula:**

a) La aceleración angular de la rueda durante los 5 s.

b) La velocidad que llevaba el punto a los 3 s de iniciarse el movimiento.

Sol.: a) 0,67 rad/s^2;
b) 0,6 m/s.

PROBLEMA RESUELTO 2

El caño de una fuente está inclinado 60° sobre la horizontal. Si el agua sale del caño con una velocidad inicial de 10 m/s:

a) ¿Qué dibujo forma el chorro de agua?

b) ¿Qué altura máxima alcanza el agua?

c) ¿A qué distancia del caño hay que colocar el sumidero?

d) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del agua cuando esta cae al sumidero?

Planteamiento y resolución

Fijamos el sistema de referencia del problema con origen en el caño, direcciones vertical y horizontal y sentidos hacia arriba y según el avance del movimiento. Entonces, en las unidades del SI $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(v_{0x}, v_{0y}) = (10 \cdot \cos 60°, 10 \cdot \text{sen } 60°) = (5, 8{,}67)$, y la aceleración de la gravedad tiene solo componente vertical con sentido negativo.

a) El chorro dibuja en el aire una parábola.

b) Para calcular la altura máxima hay que fijarse en la componente vertical del movimiento. Como la componente vertical de la velocidad en ese punto es cero, el tiempo que tarda en alcanzar ese punto es:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow 0 = 8{,}67 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 0{,}88 \text{ s}$$

En ese tiempo el agua sube hasta una altura:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = 0 + 8{,}67 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}88^2 \text{ s}^2 = 3{,}8 \text{ m}$$

c) Durante su trayectoria el agua avanza en horizontal un espacio:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 18 \text{ m} = 0 + 5 \text{ m/s} \cdot 0{,}88 \text{ s} = 4{,}4 \text{ m}$$

Si no queremos que el agua caiga sobre el suelo, sino que queremos recogerla para reciclarla, el sumidero debe estar a 4 m y 40 cm del caño.

d) La componente horizontal de la velocidad no cambia durante su movimiento, y la componente vertical de la velocidad final es igual, pero de sentido contrario a la componente vertical de la velocidad inicial. Por tanto, la velocidad final es:

$$(v_{fx}, v_{fy}) = (5, -8{,}67) \text{ m/s}$$

Y su módulo coincide con el de la velocidad inicial: 10 m/s.

ACTIVIDADES

1. **Una esquiadora realiza un salto en una arista inclinada 25° sobre la horizontal y con un desnivel de 10 m. Si la velocidad con la que empieza el vuelo es 20 m/s, calcula la altura máxima alcanzada y el punto del impacto.**

   Sol.: 3,65 m;
   45,86 m.

2. **Un niño deja caer un coche por el borde de una mesa de 70 cm de altura después de empujarlo sobre ella con una velocidad de 30 cm/s. ¿A qué distancia de la mesa cae el coche?**

   Sol.: 11,4 cm.

3. **Una estudiante se monta en una montaña rusa con varias vueltas completas. Cuando su coche empieza la primera vuelta y a 20 m del suelo se inclina 100° sobre la horizontal, se le caen las llaves del bolsillo de la camisa. Si la velocidad en ese momento es de 15 m/s, ¿a qué distancia de ese punto tendrá que buscar las llaves?**

   Sol.: 10,5 m.

4. **¿Cuánto tiempo dura la caída desde el trampolín, de 10 m, de los nadadores de alta competición que se elevan hasta tres metros por encima del trampolín en su salto?**

   Sol.: 2,41 s.

PROBLEMA RESUELTO 3

Una rueda comienza a girar con aceleración angular constante y al cabo de 3 s alcanza las 300 revoluciones por minuto. Si su radio es de 10 cm, calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad lineal que lleva un punto del borde de la rueda a los 3 s.

Planteamiento y resolución

El movimiento de la rueda es circular uniformemente acelerado. En 3 s desde el reposo alcanza una velocidad angular de:

$$\omega = \frac{300\ \cancel{\text{rev}}}{1\ \cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 31{,}42\ \text{rad/s}$$

a) La aceleración angular de la rueda es:

$$\omega = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{31{,}42\ \text{rad/s} - 0\ \text{rad/s}}{3\ \text{s}} = 10{,}47\ \text{rad/s}^2$$

b) La velocidad lineal está relacionada con la angular mediante el radio, así que:

$$v = \omega \cdot t = 31{,}42\ \text{rad/s} \cdot 0{,}1\ \text{s} = 3{,}14\ \text{m/s}$$

ACTIVIDADES

1 **Un volante que gira a 10 rad/s de velocidad angular se detiene dando 3 vueltas desde el instante que comienza a frenar hasta quedar completamente en reposo. Calcula:**

a) La aceleración angular.

b) El tiempo que tarda en detenerse.

Sol.: a) $-2{,}65$ rad/s^2; b) 3,77 s.

2 **Un disco gira a 2000 revoluciones por minuto de velocidad constante. Si su radio es de 8 cm, calcula:**

a) La distancia recorrida por un punto del borde en 5 s.

b) El tiempo que tarda en girar un ángulo de 2π radianes.

Sol.: $s = 83{,}78$ m; $t = 0{,}03$ s.

3 **Una hélice pasa de 50 a 200 revoluciones por minuto en un tiempo de 6 s. Calcula:**

a) La aceleración angular.

b) El número de vueltas dadas en esos 6 s.

Sol.: a) 2,62 rad/s^2; b) 12,51 vueltas.

4 **Un tiovivo comienza a dar vueltas. Primero con una aceleración angular de 0,2 rad/s^2 durante 8 s. Después manteniendo la velocidad de giro durante 20 s. Calcula el ángulo total girado.**

Sol.: 38,4 radianes.

5 **Un punto está situado a 30 cm del centro de una rueda. Esta empieza a girar alcanzando la velocidad angular máxima en 5 s. Sabiendo que en ese momento el punto se mueve a una velocidad de 1 m/s, calcula:**

a) La aceleración angular de la rueda durante los 5 s.

b) La velocidad que llevaba el punto a los 3 s de iniciarse el movimiento.

Sol.: a) 0,67 rad/s^2;
b) 0,6 m/s.

TERCERA ECUACIÓN DEL MRUA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **Un coche de carreras cruza la línea de meta con una velocidad de 90 km/h y con una aceleración de $a = 1{,}5$ m/s². ¿A qué distancia de la línea de meta estará cuando lleve una velocidad de 135 km/h?**

SOLUCIÓN

$v_0 = 90$ km/h $= 25$ m/s; $v = 135$ km/h $= 37{,}5$ m/s. Por tanto:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{37{,}5^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 25^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2} = 260{,}42\ \text{m}$$

2 **A un turista se le cae el teléfono móvil desde un mirador de la torre Eiffel de París. ¿Con qué velocidad llegará el móvil al suelo si el turista se encontraba a 150 m de altura?**

SOLUCIÓN

En este caso:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x} =$$
$$= \sqrt{0 + 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 150\ \text{m}} = 54{,}22\ \text{m}$$

$v_0 = 0$, pues «se le cayó» el móvil; es decir, partió del reposo.

3 **Una moto que circulaba a 120 km/h ante la proximidad de un barranco frena bruscamente hasta pararse con una aceleración de $a = 8$ m/s² quedándose justo al borde del precipicio. ¿A qué distancia se encontraba del barranco cuando comenzó a frenar?**

SOLUCIÓN

En este caso:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 33{,}33^2\ \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot (-8)\ \text{m/s}^2} = 69{,}43\ \text{m}$$

Fíjate que cuando $v < v_0$ el numerador es negativo, pero la aceleración también lo es, por lo que el espacio Δx es positivo, como debe de ocurrir.

4 **Resuelve sin usar la tercera fórmula y observa que haces lo mismo que cuando la hemos deducido.**

Un ciclista africano que circula a 50 km/h ve que un ñu entra en la carretera, por lo que frena con una aceleración de $a = 4$ m/s². Cuando la velocidad del ciclista es de 20 km/h el ñu ya ha cruzado la calzada y no supone ningún peligro, por lo que el ciclista sigue su camino con velocidad constante. ¿Qué espacio recorrió durante su frenada?

SOLUCIÓN

Pasamos las velocidades a m/s:

$$v_0 = 50\ \text{km/h} = 13{,}89\ \text{m/s};\ v = 20\ \text{km/h} = 5{,}56\ \text{m/s}$$

Despejamos el tiempo t en la 2.ª:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(5{,}56 - 13{,}89)\ \text{m/s}}{-4\ \text{m/s}^2} = 2{,}08\ \text{s}$$

Sustituimos en la 1.ª:

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 13{,}89 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2{,}08\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}08\ \text{s})^2 = 20{,}24\ \text{m}$$

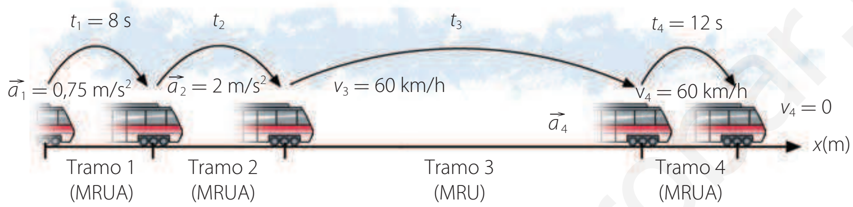
MÓVILES QUE CAMBIAN SU TIPO DE MOVIMIENTO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

5 **Un tren de cercanías sale de una estación, acelera con a = cte. = 0,75 m/s^2 durante 8 s y luego con a = cte. = 2 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad constante de 60 km/h. Mantiene la misma velocidad hasta acercarse a la siguiente estación. En ese momento frena uniformemente hasta pararse en 12 s. El tiempo total del trayecto fue de 80 s. ¿Qué distancia hay entre las dos estaciones? Representa la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.**

SOLUCIÓN

1. Dibuja un sistema de referencia indicando el tipo de movimiento en cada tramo y escribiendo sobre cada uno de ellos los datos del problema.



2. Indica ahora la posición x del tren al final de cada tramo. (La que tenga al final del último tramo será la respuesta a la pregunta.)

- Tramo 1 (MRUA):

$$x_1 = x_{01} + v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75\ \text{m/s}^2 \cdot 8^2\ \text{s}^2 = 24\ \text{m}$$

Siendo $x_{01} = 0$, $v_{01} = 0$ m/s (parado), $t_1 = 8$ s y $a_1 = 0{,}75$ m/s^2.

- Tramo 2 (MRUA):

$x_{02} = x_1 = 24$ m (la posición inicial en el 2.º tramo es la final en el 1.º).

$v_{02} = v_{f1} = v_{01} + a_1t_1 = 0 + 0{,}75$ m/s$^2 \cdot 8$ s $= 6$ m/s (la velocidad inicial en el 2.º tramo es la final en el 1.º).

$a_2 = 2$ m/s^2; $v_{f2} = 60$ km/h $= 16{,}67$ m/s.

$$a_2 = \frac{v_{f2} - v_{02}}{t_2} \rightarrow t_2 = \frac{v_{f2} - v_{02}}{a_2} = \frac{(16{,}67 - 6)\ \text{m/s}}{2\ \text{m/s}^2} = 5{,}34\ \text{s}$$

Por tanto:

$$x_2 = x_{02} + v_{02}t_2 + \frac{1}{2}a_2t_2^2 = 24\ \text{m} + 6\ \text{m/s} \cdot 5{,}34\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}34^2\ \text{s}^2 = 84{,}56\ \text{m}$$

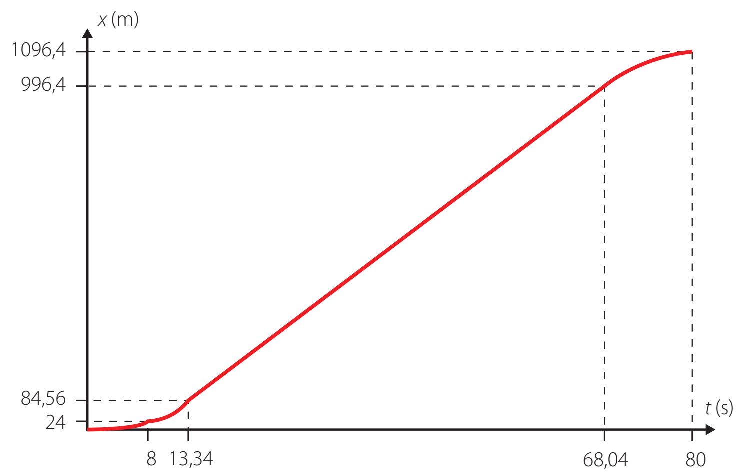
- Tramo 3 (MRU):

$x_{03} = x_2 = 84{,}56$ m;

$v_3 = cte.$ 60 km/h $= 16{,}67$ m/s

y $t_3 = 80 - t_1 - t_2 - t_4 =$
$= 80$ s $- 8$ s $- 5{,}34$ s $- 12$ s $= 54{,}7$ s.

$$x_3 = x_{03} + v_3t_3 = 84{,}56\ \text{m} + 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 54{,}7\ \text{s} = 996{,}4\ \text{m}$$



- Tramo 4 (MRUA):

$x_{04} = x_3 = 996{,}4$ m;

$v_{04} = v_{f3} = 16{,}67$ m/s;

$t_4 = 12$ s; $v_{f4} = 0$ m/s.

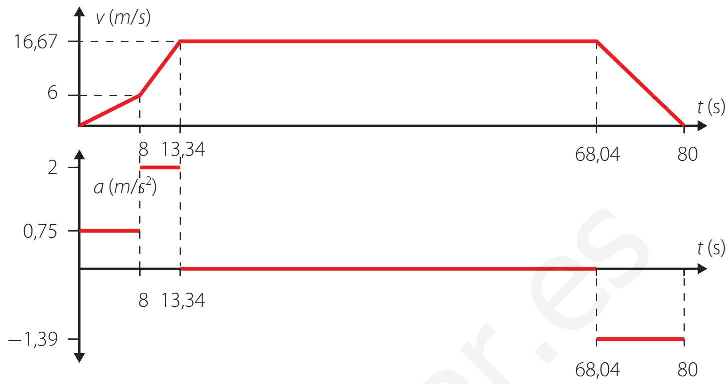
$$x_4 = x_{04} + v_{04}t_4 - \frac{1}{2} \cdot a_4t_4^2 = 996{,}4\ \text{m} + 16{,}67\ \text{m/s} \cdot 12\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}39\ \text{m/s}^2 \cdot 12^2\ \text{s}^2 = 1096{,}4\ \text{m}$$ hay entre las dos estaciones.

continúa →

PROBLEMAS CON DIFERENTES MÓVILES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

3. Representa ahora *x*-*t*, *v*-*t*, y *a*-*t*:
   - Tramo 1 → de $t = 0$ s a $t = 8$ s.
   - Tramo 2 → de $t = 8$ s a $t = 13{,}34$ s.
   - Tramo 3 → de $t = 13{,}34$ s a $t = 68{,}04$ s.
   - Tramo 4 → de $t = 68{,}04$ s a $t = 80$ s.



2. EJERCICIO RESUELTO

Una pareja, que estaba sentada en una terraza de un bar al comienzo de una calle, discute y ella se va, dejando a su novio allí sentado. Cuando llega al final de la calle, se arrepiente y vuelve corriendo para reconciliarse con una a = cte. = 0,5 m/s² justo a la vez que él se levanta y comienza a andar hacia ella con v = cte. = 4 km/h. La calle mide 100 m.

a) ¿Cuánto tiempo tardan en fundirse en un abrazo?

b) ¿A qué distancia de la terraza lo harán?

c) ¿Qué velocidad llevará cada uno justo antes del abrazo?

SOLUCIÓN

Sigamos los siguientes pasos:

1. Dibujamos la situación en el momento que ella da la vuelta y él comienza a andar ($t = 0$) en un sistema de referencia común para ambos.

2. Identificamos el tipo de movimiento de cada uno y escribimos sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

Teniendo en cuenta que $x_{01} = 0$, $x_{02} = 100$, $v_{02} = 0$ y que $a_2 = 0{,}5$ m/s² es negativa, pues es un vector que va en el mismo sentido que la velocidad (por lo tanto, con el mismo signo que esta, que será negativo, pues la velocidad va en sentido contrario del eje X), tenemos:

Chico → MRU
- $v_1 = 4$ km/h $= 1{,}11$ m/s
- $x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 1{,}11 \cdot t_1$

Chica → MRUA
- $v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot t_2$
- $x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a_2\, t_2^2 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2$

¡Ojo! ¡x_2 es la posición (la coordenada) de la chica en cualquier instante de tiempo en nuestro eje X; no el espacio que ha recorrido!

continúa →

NOMBRE: CURSO: FECHA:

2. Identificamos el tipo de movimiento de cada uno y escribimos sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

Teniendo en cuenta que $x_{01} = 0$, $x_{02} = 100$, $v_{02} = 0$ y que $a_2 = 0{,}5$ m/s^2 es negativa, pues es un vector que va en el mismo sentido que la velocidad (por tanto, con el mismo signo que esta, que será negativo, pues la velocidad va en sentido contrario del eje X), tenemos:

Chico → MRU

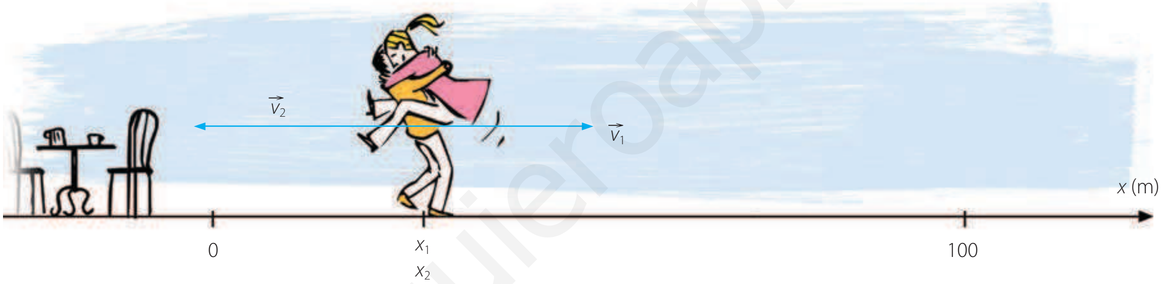
- $v_1 = 4$ km/h $= 1{,}11$ m/s
- $x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 1{,}11 \cdot t_1$

Chica → MRUA

- $v_2 = v_{02} + a_2 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot t_2$
- $x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2\, t_2^2 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2$

¡Ojo! ¡x_2 es la posición (la coordenada) de la chica en cualquier instante de tiempo en nuestro eje X; no el espacio que ha recorrido!

3. Ahora, para responder a las preguntas, seguimos la siguiente estrategia:
Dibujamos la situación que nos plantea el enunciado y nos preguntamos qué tienen en común el chico y la chica en esa situación para poder plantear una igualdad: ¿Es la velocidad? ¿Es el tiempo transcurrido? ¿Es la posición?



Tras pensar un poco descubriremos que cuando se encuentran sus velocidades no son iguales, pero sí lo son tanto el tiempo transcurrido como la posición de ambos. Es decir:

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$

4. Resolvemos (pista: es más fácil comenzar con $x_1 = x_2$):

$$x_1 = x_2 \rightarrow 1{,}11 \cdot t_1 = 100 - 0{,}25 \cdot t_2^2 \rightarrow 1{,}11 \cdot t = 100 - 0{,}25 \cdot t^2$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.) Ordenamos la ecuación:

$$0{,}25 \cdot t^2 + 1{,}11 \cdot t - 100 = 0 \rightarrow t = \frac{-1{,}11 \pm \sqrt{1{,}11^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-100)}}{2 \cdot 0{,}25} \rightarrow \begin{cases} t_1 = 17{,}9 \text{ s} \\ t_2 = -22{,}3 \text{ s} \end{cases}$$

Como no tiene sentido un tiempo negativo, la única solución válida es:

$t = 17{,}9$ s → es el tiempo que tardan en fundirse en un abrazo

En este instante de tiempo $t = 17{,}9$ s, hallamos la posición de ambos (es la misma para los dos, recuerda que $x_1 = x_2$). Sustituimos en x_1 que en este caso es más fácil:

$x_1 = 1{,}11 \cdot t = 1{,}11 \cdot 17{,}9 = 19{,}9$ m → Posición de ambos y distancia a la que están de la terraza cuando se encuentran.

El chico habrá recorrido un espacio de 19,9 m. Y la chica, de $(100 - 19{,}9) = 80{,}1$ m.

Y en el instante del encuentro cada uno llevará una velocidad de:

- Chico → $v_1 = 4$ km/h $= 1{,}11$ m/s
- Chica → $v_2 = -0{,}5 \cdot t_2 = -0{,}5 \cdot 17{,}9 = -9$ m/s

(El signo menos significa que la chica corre en sentido negativo del eje X.)

PROBLEMAS CON DIFERENTES MÓVILES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

6 **En un momento dado el coche de unos ladrones pasa junto a un bar de carretera con una velocidad de 100 km/h. Diez minutos después pasa por el mismo sitio persiguiéndolo un coche de policía con una velocidad de 120 km/h. ¿Qué tiempo tarda en alcanzar el coche de policía al de los ladrones? ¿A qué distancia del bar de carretera estarán en ese momento?**

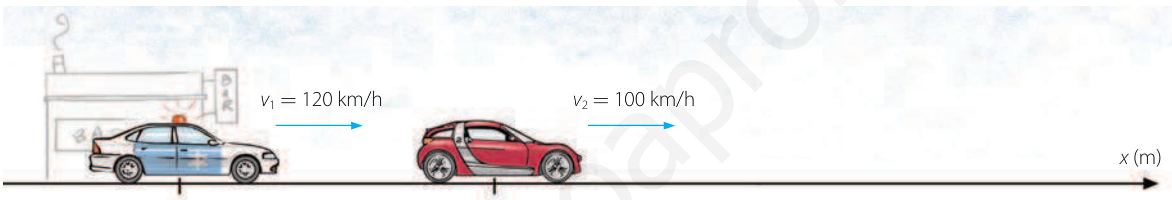
SOLUCIÓN

1. Haz un dibujo de los dos coches sobre un sistema de referencia justo cuando el coche de policía pasa por delante del bar de carretera (sitúa ahí el origen del eje X).

Pista: estás dibujando la situación en $t = 0$; por tanto, x_0 de cada coche es:

- Coche de policía $\rightarrow x_0 = 0$.
- Coche de los ladrones $\rightarrow x_0 =$ espacio que ha recorrido en los 10 minutos que tardó en pasar el coche de policía por el bar de carretera:

$$10\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{100\ \text{km}}{60\ \cancel{\text{min}}} = 16{,}67\ \text{km} = 16\,670\ \text{m}$$



2. Identifica el tipo de movimiento de cada uno y escribe sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo (expresa los espacios en metros y las velocidades en m/s.

Coche de policía	Coche de los ladrones
MRU	**MRU**
$v_1 = 120\ \text{km/h} = 33{,}33\ \text{m/s}$	$v_2 = 100\ \text{km/h} = 27{,}78\ \text{m/s}$
$x_1 = x_{01} + v_1 \cdot t_1 = 33{,}33 \cdot t_1$	$x_2 = x_{02} + v_2 \cdot t_2 = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t_2$

3. Establece las igualdades que se produzcan en el momento de la captura.

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$

4. Resuelve esas ecuaciones y averigua cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al de los ladrones.

Es más fácil comenzar con $x_1 = x_2$.

$$x_1 = x_2 \rightarrow 33{,}33 \cdot t_1 = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t_2 \rightarrow 33{,}33 \cdot t = 16\,670 + 27{,}78 \cdot t$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.) Despejamos t:

$$(33{,}33 - 27{,}78) \cdot t = 16\,670 \rightarrow t = \frac{16\,670\ \text{m}}{33{,}33\ \text{m/s} - 27{,}78\ \text{m/s}} = 3004\ \text{s}$$

Es el tiempo que tarda en alcanzar el coche de policía al de los ladrones.

5. Con el tiempo anterior, halla a qué distancia del bar de carretera se produce la captura.

Como transcurrido el tiempo calculado en el apartado anterior la posición de ambos coches es la misma (recuerda: $x_1 = x_2$), para hallar la distancia al bar de carretera puedes sustituir ese tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones: x_1 o x_2. Sustituimos, por ejemplo, en x_1, que es más sencilla:

$x_1 = 33{,}33 \cdot t_1 = 33{,}33 \cdot 3\,004 = 100\,123\ \text{m} \rightarrow$ Distancia al bar de carretera cuando el coche de policía alcanzó al de los ladrones.

Comprobamos que daría lo mismo si hubiéramos sustituido en la ecuación de x_2:

$$x_2 = 16\,670\ \text{m} + 27{,}78\ \text{m/s} \cdot t = 16\,670\ \text{m} + 27{,}78\ \text{m/s} \cdot 3004\ \text{s} = 100\,121\ \text{m} \approx 100\,123\ \text{m}$$

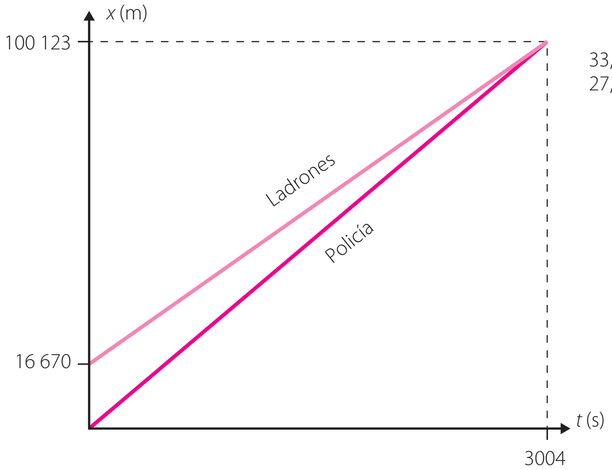
(La pequeña diferencia es por los redondeos de decimales que hemos hecho en cada operación.)

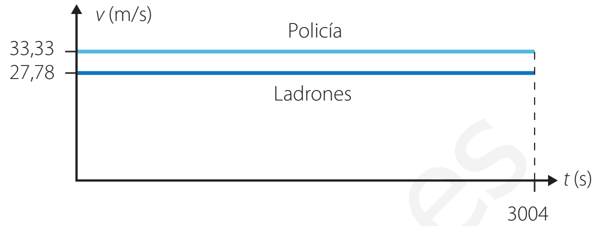
continúa →

PROBLEMAS CON DIFERENTES MÓVILES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

6. Representa la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo de los dos coches (en la misma gráfica los dos).





7 **En un duelo medieval en una película dos caballeros con sus caballos, sus armaduras y sus espadas, separados entre sí 100 m, parten del reposo y salen uno al encuentro del otro para luchar. Los dos se mueven con una aceleración constante: el primero, de 2 m/s^2, y el segundo, de 3 m/s^2.**

a) ¿A qué distancia de donde salió el primero se enzarzarán en la batalla?

b) ¿Cuánto tiempo habrán tardado en alcanzarse?

c) ¿Qué velocidad llevaba cada uno cuando se encontraron los dos actores que hacen el papel de caballeros?

SOLUCIÓN

1. Haz un dibujo en el mismo sistema de referencia justo en el instante en que comienzan a correr ($t = 0$).

2. Indica el tipo de movimiento de cada uno y escribe sus ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo.

(Pista: no olvides que, si corren en sentidos contrarios, las velocidades son de distinto signo, y que la aceleración tiene el mismo signo que la velocidad cuando tiene el mismo sentido y signo contrario cuando tiene sentido contrario.)

- Caballero 1 (MRUA):

$$v_1 = v_{01} + a_1 \cdot t_1 = 2t_1$$

$$x_1 = x_{01} + v_{01} \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2t_1^2 = t_1^2$$

- Caballero 2 (MRUA):

$$v_2 = v_{02} - a_2 \cdot t_2 = -3t_1$$

$$x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot a_2 t_2^2 = x_{02} - \frac{1}{2} \cdot 3t_1^2 = 100 - 1{,}5t_2^2$$

($v_{01} = v_{02} = 0$ porque inicialmente estaban parados.)

continúa →

PROBLEMAS CON DIFERENTES MÓVILES

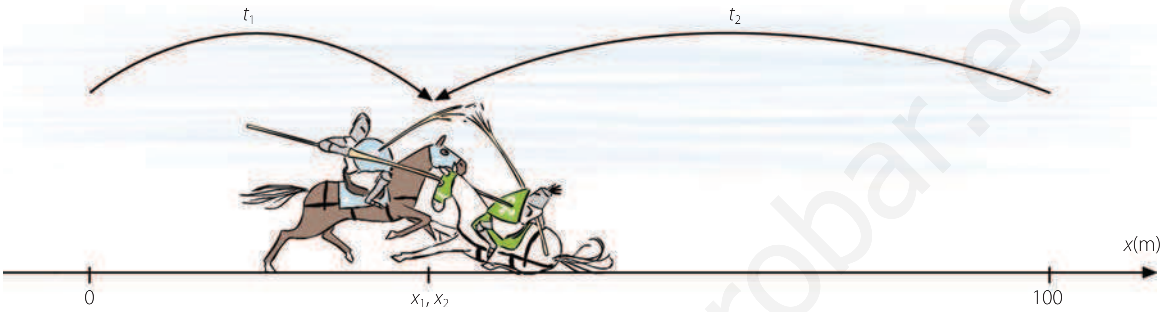
NOMBRE: CURSO: FECHA:

3. Dibuja el momento de su encuentro. ¿Ocurre más cerca de donde partió el caballero 1 o de donde partió el caballero 2?

Escribe las igualdades que se produzcan en ese momento.

El encuentro ocurre más cerca de donde partió el caballero 1, pues su aceleración es menor. En ese momento se cumple que:

$$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad t_1 = t_2$$



4. Resuelve las ecuaciones del paso anterior.

Empezamos con $x_1 = x_2$ que es más fácil:

$$x_1 = x_2 \rightarrow t_1^2 = 100 - 1{,}5t_2^2 \rightarrow t^2 = 100 - 1{,}5t^2 \rightarrow 2{,}5t^2 = 100 \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{100}{2{,}5}} = \sqrt{40} = +6{,}3 \text{ s}$$

(Como $t_1 = t_2$, llamamos t a ambos tiempos.)

6,3 s es el tiempo que tardan en encontrarse (despreciamos la solución negativa).

Este es el tiempo que tardan en alcanzarse.

5. Con el tiempo anterior, halla la posición que tenían cuando se enzarzaron.

Podemos usar indistintamente la ecuación de x_1 o de x_2, puesto que $x_1 = x_2$:

$$x_1 = t_1^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 = 40 \text{ m}$$

Comprobemos que daría igual en la otra ecuación:

$$x_2 = 100 - 1{,}5t_2^2 = 100 - 1{,}5 \cdot \left(\sqrt{40}\right)^2 = 100 - 60 = 40 \text{ m}$$

¿Cuánto espacio ha recorrido cada uno?

- El caballero 1 ha recorrido 40 m.
- El caballero 2 ha recorrido:

$$(100 - 40) \text{ m} = 60 \text{ m}$$

Reflexiona sobre la diferencia entre posición y espacio recorrido.

La posición de ambos, es decir, el lugar donde se encuentran, es el mismo, pero el espacio que han recorrido hasta llegar a esa posición es diferente para cada uno.

Nuestras ecuaciones de x_1 y x_2 nos indican la posición de cada caballero a medida que pasa el tiempo, que no siempre es lo mismo que el espacio que recorren.

6. Con el tiempo del apartado 4 halla la velocidad que tenía cada uno cuando se enzarzaron.

- Caballero 1:

$$v_1 = 2 \cdot t_1 = 2 \cdot 6{,}3 \text{ s} = 12{,}6 \text{ m/s}$$

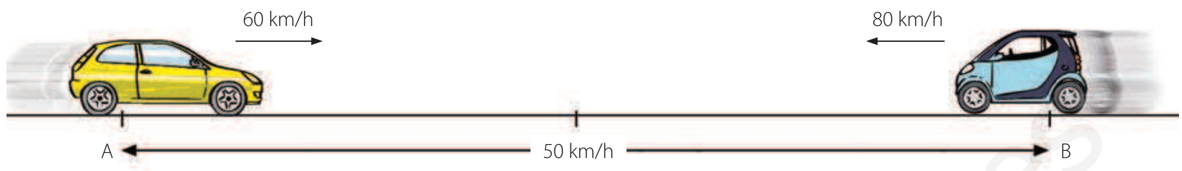
- Caballero 2:

$$v_2 = -3t_1 = -3 \cdot 6{,}3 \text{ s} = -18{,}9 \text{ m/s}$$

(El signo menos indica que el caballero 2 se mueve en sentido negativo del eje X.)

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

8 **Dos coches que circulan en sentidos contrarios con velocidades constantes de 60 y 80 km por hora, respectivamente, se encuentran separados 50 km cuando el reloj marca la una en punto. Calcula a qué hora se cruzarán.**



SOLUCIÓN

El origen del sistema de referencia se fija en el punto de partida del primer coche, y se toma como sentido positivo el de avance del primer coche también. Utilizando este sistema de referencia las posiciones de partida de los dos coches son $x_{A0} = 0$ km y $x_{B0} = 50$ km, y las velocidades son $v_A = 60$ km/h y $v_B = 80$ km/h. Como los movimientos de ambos coches son rectilíneos y uniformes, las posiciones en función del tiempo son:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \rightarrow \begin{cases} x_A(t) = 60t \\ x_B(t) = 50 - 80t \end{cases}$$

Imponiendo que las posiciones en el instante que se cruzan sean iguales:

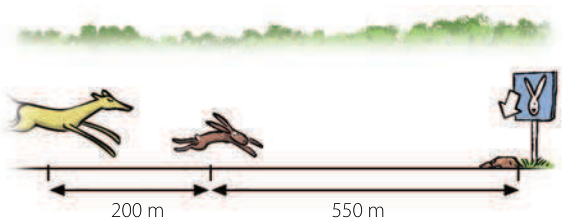
$$x_A(t) = x_B(t) \rightarrow 60t = 50 - 80t \rightarrow t = \frac{50 \text{ km}}{140 \text{ km/h}} = 0{,}357 \text{ h}$$

Es decir, 21 min 25 s. Por tanto, se cruzarán a las 13 h 21 min 25 s.

3. EJERCICIO RESUELTO

Una liebre corre hacia su madriguera perseguida por un galgo que trata de alcanzarla. El galgo corre a 40 km/h, mientras que la liebre lo hace a 30 km/h. Sabiendo que la distancia inicial que los separa es de 200 m y que de la posición inicial de la liebre a la madriguera hay 550 m, calcula si la liebre conseguirá llegar a su madriguera antes de que el galgo la alcance.

SOLUCIÓN



Las velocidades de la liebre y el galgo en el SI de unidades son, respectivamente, 8,33 m/s y 11,11 m/s. Situando el origen del sistema de referencia en la posición inicial del galgo, tomando como sentido positivo el del movimiento de ambos animales, las ecuaciones de la posición para cada animal son:

$$x_{\text{liebre}}(t) = 200 + 8{,}33 \cdot t$$

$$x_{\text{galgo}}(t) = 11{,}11 \cdot t$$

En el momento en que el galgo alcance a la liebre sus posiciones serán iguales, por lo que:

$$200 + 8{,}33 \cdot t = 11{,}11t \rightarrow t = \frac{200}{2{,}78} = 71{,}94 \text{ s}$$

Y la posición en ese instante será:

$$x_{\text{galgo}}(t = 71{,}94 \text{ s}) = 11{,}11 \text{ m/s} \cdot 71{,}94 \text{ s} = 799{,}25 \text{ m}$$

La liebre, por tanto, se salvará, porque su madriguera está situada a 750 m de la posición inicial del galgo y este necesita mayor distancia para alcanzarla.

NOMBRE: ____________ CURSO: ________ FECHA: ________

9 **Jaime sale de su casa a las 8 en punto de la mañana para ir al colegio. A los 10 minutos llega a casa de Juan, situada a 1 km de la suya. Juan está terminando su desayuno, así que hasta las 8:25 h no se ponen en marcha los dos amigos. A las 8:40 h, cinco minutos antes de empezar las clases, Jaime y Juan están entrando en su colegio situado a 2 km de la casa de Juan. Si el colegio y las casas de Jaime y Juan están alineados, dibuja la gráfica del movimiento y calcula las velocidades de Jaime en cada uno de los tramos.**

SOLUCIÓN

Jaime cubre la distancia de su casa al colegio en tres tramos. En el primero va desde su casa hasta casa de Juan durante 10 minutos a velocidad constante. Como la casa de Juan está a 1 km, su velocidad es:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{1000 \text{ m}}{600 \text{ s}} = 1{,}67 \text{ m/s}$$

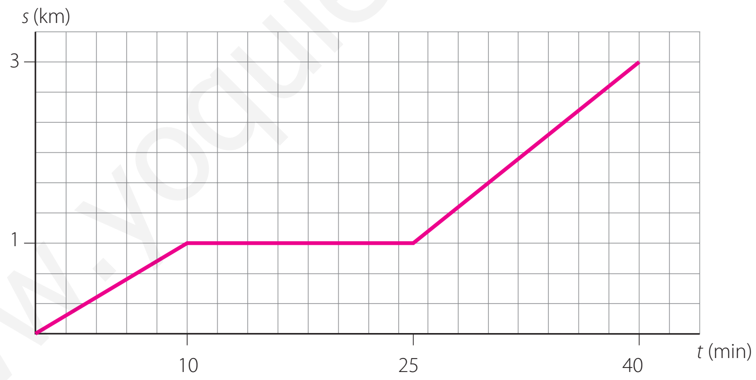
Durante los quince minutos del segundo tramo Jaime no recorre distancia porque está en casa de Juan esperando que este termine el desayuno. La velocidad es, por tanto:

$$v_2 = 0 \text{ m/s}$$

En el tercer tramo los dos amigos recorren los 2 km que les separan del colegio en quince minutos a velocidad constante. Su velocidad es:

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{2000 \text{ m}}{900 \text{ s}} = 2{,}22 \text{ m/s}$$

La gráfica de la distancia recorrida frente al tiempo es entonces:



10 **El vector de posición de un móvil viene dado por la siguiente expresión: $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t\vec{j}$.**

SOLUCIÓN

a) Calcula la ecuación de la trayectoria.

Las ecuaciones para las coordenadas de la posición del móvil son:

$$x(t) = 4 \cdot t;\ y(t) = 3 \cdot t$$

Despejando t de una expresión y sustituyendo en la otra tenemos:

$$y = \frac{3}{4}x$$

Que es la ecuación de una recta que pasa por el origen.

continúa →

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

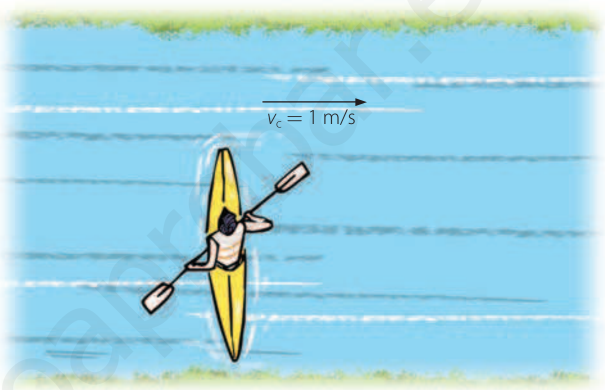
b) Indica el tipo de movimiento y el valor de la velocidad en un instante *t*.

Derivando el vector de posición se obtiene el vector velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

Que es constante; no depende del tiempo. El movimiento es, por tanto, rectilíneo uniforme con velocidad $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ m/s.

11 **Luis practica el piragüismo desde niño y es capaz de remar a una velocidad constante de 2 m/s en aguas en calma.**



SOLUCIÓN

a) Calcula en qué dirección tendrá que remar para atravesar perpendicularmente a la orilla un río de 30 m de ancho en el que la velocidad de la corriente es de 1 m/s.

Se elige un sistema de referencia en el eje X en el sentido de la corriente. En ese sistema de referencia la corriente tiene velocidad:

$$\vec{v}_c(t) = 1 \cdot \vec{i}$$

Luis va a atravesar el río perpendicularmente a ella: su velocidad no debe tener componente en dicho eje. Para compensar el efecto de la corriente sobre su piragua la velocidad que Luis debe llevar es:

$$\vec{v}(t) = -1 \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$$

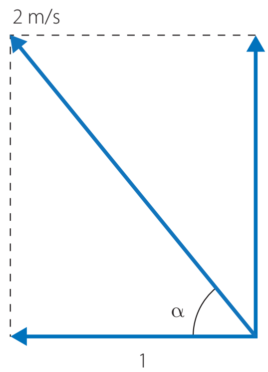
De modo que, sumado a la velocidad de la corriente, nos quede únicamente la componente según el eje Y. Como el módulo de la velocidad con la que Luis rema es 2 m/s, se tiene que:

$$(-1)^2 + v_y^2 = 2^2 \rightarrow v_y = \sqrt{3} = 1{,}73 \text{ m/s}$$

Conocidas las dos componentes de su velocidad es fácil calcular el ángulo con respecto a la orilla con que Luis tiene que remar:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

Luis debe remar con ángulo de 120° con respecto al sentido de avance de la corriente.



b) Calcula también el tiempo que tardará en llegar a la otra orilla.

El tiempo que tardará en atravesar el río se calcula con la componente del movimiento perpendicular a la orilla. La componente de la velocidad en esa dirección es 1,71 m/s, y la distancia a cubrir es de 30 m.

Por tanto:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{30 \text{ m}}{1{,}73 \text{ m/s}} = 17{,}34 \text{ s}$$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

12 **María está asomada a la ventana de su casa a 15 m de altura.**

SOLUCIÓN

a) ¿Con qué velocidad debe lanzar Inés, situada justo debajo de la ventana, un estuche desde el suelo para que llegue justo hasta la posición de María?

El problema trata un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, g, y, por tanto, de sentido negativo.

La velocidad debe ser nula a 15 m de altura. Así pues, utilizamos la expresión:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

Y sustituimos los valores para v, y, g. Debemos recordar que la aceleración tiene sentido contrario al movimiento:

$$0^2 = v_0^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 15\ \text{m}$$

De las dos posibles soluciones descartamos la negativa, porque indicaría que el objeto se lanza hacia abajo, que es el sentido negativo en nuestro sistema de referencia. Despejando v_0:

$$v_0 = 17{,}15\ \text{m/s}$$

b) ¿Cuánto tiempo habrá tardado el estuche en recorrer los últimos 5 m de subida?

A los 10 m de altura el estuche llevaba una velocidad:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

De nuevo la aceleración tiene sentido negativo:

$$v^2 = 17{,}15^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 10\ \text{m}$$

De las dos posibles soluciones descartamos la negativa porque indicaría velocidad hacia abajo, y no corresponde a esta situación:

$$v = 9{,}91\ \text{m/s}$$

Por tanto, el tiempo transcurrido de los 10 m a los 15 m ha sido:

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow 0 = 9{,}91 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow t = 1{,}01\ \text{s}$$

c) ¿Con qué velocidad debe lanzar María hacia abajo una pelota, en el mismo instante en que Inés lanza el estuche, para que el choque entre ambos objetos se produzca a 5 m de altura?

Calculamos el tiempo que tarda el estuche en recorrer los primeros 5 m:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot a \cdot y \rightarrow v^2 = 17{,}15^2\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 5\ \text{m} \rightarrow v = 14\ \text{m/s}$$

Por lo que el tiempo tardado en recorrer los primeros 5 m ha sido:

$$v = v_0 - g \cdot t \rightarrow 14\ \text{m/s} = 17{,}15\ \text{m/s} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 0{,}32\ \text{s}$$

Ese mismo tiempo debe tardar la pelota en bajar 10 m, por lo que utilizamos:

$$y = y_0 - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Ahora la velocidad y la aceleración son negativas porque ambas están orientadas hacia abajo:

$$5\ \text{m} = 15\ \text{m} - v_0 \cdot 0{,}32\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}32^2\ \text{s}^2$$

El resultado es:

$$v_0 = 29{,}68\ \text{m/s}$$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

13 **Un ciclista se pone en movimiento con una aceleración de 2 m/s² que mantiene durante 18 s. Pasado este tiempo mantiene la velocidad constante durante 500 m y finalmente frena deteniéndose 1000 m más allá del punto en que comenzó a moverse. Calcula la aceleración de cada tramo y el tiempo total empleado en la carrera.**

SOLUCIÓN

El movimiento del ciclista varía en los tres tramos que recorre.

Inicialmente el ciclista avanza con un MRUA, donde velocidad y aceleración tienen igual sentido. Se toma como origen del sistema de referencia el origen del movimiento, y sentido positivo el de avance del ciclista. Entonces durante los primeros 18 s el ciclista recorre una distancia:

$$x - x_0 = + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x - 0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot 18^2 \text{ s}^2 = 324 \text{ m}$$

Y termina este tramo con una velocidad:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v = 0 + 2 \text{ m/s}^2 \cdot 18 \text{ s} = 36 \text{ m/s}$$

En el segundo tramo la velocidad permanece constante y el movimiento es rectilíneo y uniforme. El tiempo empleado en este tramo es:

$$t = \frac{500 \text{ m}}{36 \text{ m/s}} = 13{,}89 \text{ s}$$

El tercer tramo, en el que frena, corresponde a un movimiento uniformemente decelerado; es decir, con aceleración en sentido contrario al de avance. La distancia recorrida es:

$$1000 \text{ m} - (324 + 500) \text{ m} = 176 \text{ m}$$

Y la aceleración en este tramo la calculamos utilizando:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x \rightarrow 0^2 = 36^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2 \cdot a \cdot 176 \text{ m} \rightarrow a = -3{,}68 \text{ m/s}^2$$

El tiempo empleado en este tramo lo calculamos usando:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 0 = 36 \text{ m/s} - 3{,}68 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow t = 9{,}78 \text{ s}$$

El tiempo total empleado es la suma del utilizado en cada tramo:

$$18 \text{ s} + 13{,}89 \text{ s} + 9{,}78 \text{ s} = 41{,}67 \text{ s}$$

14 **Desde la punta de un trampolín que está a 3 m sobre el agua Alba se impulsa verticalmente hacia arriba con una velocidad de 2 m/s. Calcula la velocidad con que Alba entrará en el agua.**

SOLUCIÓN

El movimiento del problema es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Si el sistema de referencia tiene el origen en la superficie del agua, y dirección y sentido, vertical y hacia arriba, la posición inicial de Alba es $y_0 = 3$ m; la velocidad inicial, $v_0 = 2$ m/s, tiene sentido positivo y la aceleración de la gravedad tiene sentido negativo:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 3 \text{ m} + 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 3}}{2 \cdot (-4{,}9)}$$

La solución negativa se descarta. El tiempo que tarda en llegar al agua es $t = 1{,}01$ s.

La velocidad de llegada se halla utilizando el tiempo previamente calculado:

$$v = v_0 - g \cdot t = 2 - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}01 \text{ s} = -7{,}9 \text{ m/s}$$

El signo de la velocidad es negativo porque el vector velocidad tiene sentido negativo en el sistema de referencia considerado.

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

4. EJERCICIO RESUELTO

Andrea se deja caer desde el punto más alto de la torre Eiffel a 320 m de altura. Cuando pasa por un punto situado a 200 m de altura abre su paracaídas y a partir de ese momento baja con velocidad constante. Calcula el tiempo total que dura la caída hasta el suelo.

SOLUCIÓN

El movimiento rectilíneo de Andrea está compuesto de un tramo uniformemente acelerado partiendo del reposo y otro segundo tramo de movimiento uniforme.

El sistema de referencia se fija en el punto más alto de la torre Eiffel con sentido positivo hacia abajo, de manera que Andrea parte de la posición $y_0 = 0$ m, abre el paracaídas en $y_1 = 120$ m y llega a la base de la torre Eiffel en la posición $y_2 = 320$ m.

En este sistema de referencia la velocidad es positiva, y la aceleración de la gravedad, también.

Calculamos el tiempo que Andrea se mueve en caída libre bajo la aceleración de la gravedad de la siguiente manera:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 120 \text{ m} = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = 4{,}95 \text{ s}$$

Ahora podemos calcular la velocidad al final del primer tramo:

$$v_1 = v_0 + a \cdot t \rightarrow v_1 = 0 + 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 4{,}95 \text{ s} = 48{,}51 \text{ m/s}$$

Que corresponde a la velocidad constante v_1 con la que Andrea baja durante el segundo tramo.
El tiempo que tarda Andrea en recorrer los 200 m que le faltan para llegar al suelo con movimiento uniforme es:

$$v_1 = \frac{y_2 - y_1}{t} \rightarrow t = \frac{320 \text{ m} - 120 \text{ m}}{48{,}51 \text{ m/s}} = 4{,}12 \text{ s}$$

El tiempo total empleado en la caída es:

$$4{,}95 \text{ s} + 4{,}12 \text{ s} = 9{,}07 \text{ s}$$

15 **En la salida de una curva en un Gran Premio de Fórmula 1, Fernando Alonso pisa el acelerador a fondo para pasar de 50 km/h a su velocidad máxima en la recta de meta. Sin embargo, justo en el momento de alcanzar la velocidad de 300 km/h, el coche que va delante sufre un accidente y Fernando se ve obligado a frenar hasta quedar parado a 500 m de la salida de la curva. Si la fase de aceleración duró 8 s, ¿qué distancia necesitó para frenar?**

SOLUCIÓN

Fernando Alonso mantiene un movimiento uniformemente acelerado durante 8 s y, después, otro uniformemente decelerado. Las velocidades del enunciado en el SI son:

$$v_1 = \frac{50 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 13{,}89 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{300 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 83{,}33 \text{ m/s}$$

Considerando como sentido positivo el de avance de Alonso, la aceleración en el primer tramo, que tiene el sentido del movimiento, debe ser positiva:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 83{,}33 \text{ m/s} = 13{,}89 \text{ m/s} + a \cdot 8 \text{ s} \rightarrow a = 8{,}68 \text{ m/s}^2$$

continúa →

NOMBRE: CURSO: FECHA:

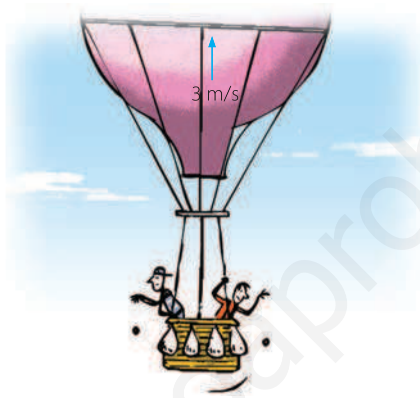
Ahora podemos calcular la distancia que recorrió mientras aceleraba:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow x = 0\text{ m} + 13{,}89\text{ m/s} \cdot 8\text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 8{,}68\text{ m/s}^2 \cdot 8^2\text{ s}^2 = 388{,}88\text{ m}$$

La distancia que utilizó en la frenada es la distancia recorrida en total menos la que recorrió acelerando:

$$500\text{ m} - 388{,}88\text{ m} = 111{,}12\text{ m}$$

16 **Tomás y Paco están en un globo que asciende a 3 m/s. Cuando la altitud es de 50 m, Tomás deja caer una piedra. Calcula:**



SOLUCIÓN

a) El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo.

El problema trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La dirección del movimiento es vertical, y el sentido positivo del sistema de referencia, hacia arriba. La aceleración del móvil es la de la gravedad, *g*, y, por tanto, de sentido negativo.

La velocidad inicial con que parte la piedra del globo coincide con la velocidad de ascensión del globo, y es de 3 m/s y positiva. Por tanto, la piedra ascenderá un poco antes de parar y volverá a caer pasando de nuevo por el punto en que fue lanzada. Desde el globo, Tomás y Paco verán la piedra alejarse desde el primer momento.

El tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 50\text{ m} + 3\text{ m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Que es una ecuación de segundo grado para *t*.

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-4{,}9) \cdot 50}}{2 \cdot (-4{,}9)} \rightarrow t = \frac{-3 \pm 31{,}45}{-9{,}8}$$

Descartamos la solución negativa. El tiempo que tarda la piedra en caer es:

$$t = 3{,}51\text{ s}$$

b) La velocidad a la que tendrá que lanzar Paco una segunda piedra 2 s después de que Tomás suelte la suya para que ambas lleguen al suelo simultáneamente.

Como Paco lanza la piedra 2 s después que Tomás, para que lleguen a la vez al suelo tiene que tardar 2 s menos que la piedra de Tomas, $t = 1{,}51$ s. Además, puesto que el globo sube con velocidad uniforme de 3 m/s, la piedra de Paco se lanza desde una altura añadida de 6 m (distancia que se eleva el globo durante los dos segundos). Por tanto:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 56\text{ m} + v_0 \cdot 1{,}51\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 1{,}51^2\text{ s}^2 \rightarrow v_0 = -29{,}68\text{ m/s}$$

Efectivamente, la velocidad sale negativa, porque Paco debe lanzar su piedra hacia abajo.

TIRO PARABÓLICO

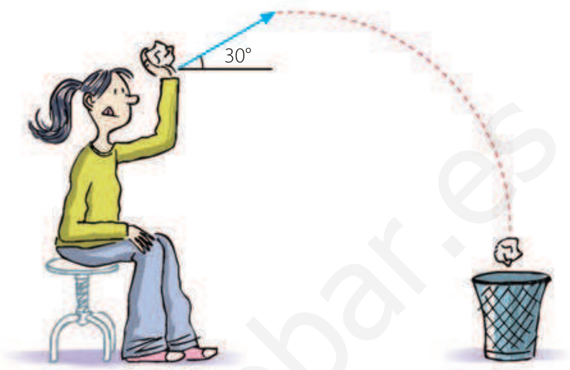
NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

5. EJERCICIO RESUELTO

Laura, que está aburrida en su casa, se entretiene lanzando bolas de papel a la papelera. Efectúa los lanzamientos con una velocidad inicial de 2 m/s y un ángulo de 30° sobre la horizontal. Si la altura desde la que lanza es de 1 m y 15 cm:

a) ¿Dónde debe estar situada la papelera para que Laura enceste sus lanzamientos, suponiendo que la altura de la papelera es de 50 cm y su diámetro es de 20 cm?

b) ¿Con qué velocidad entrará la bola en la papelera?



SOLUCIÓN

Fijamos el sistema de referencia del problema con origen en los pies de Laura, direcciones vertical y horizontal y sentidos hacia arriba y según el avance del movimiento.

Entonces, en el SI de unidades:

$$(x_0\,,y_0) = (0\,,1{,}15);\ (v_{0x}\,,v_{0y}) = (2\cdot\cos 30°\,,2\cdot\text{sen }30°) = (1{,}73\,,1)$$

Y la aceleración de la gravedad tiene solo componente vertical con sentido negativo.

a) Calculamos el tiempo que tarda en llegar la bola a la papelera fijándonos en la componente vertical, que sigue un movimiento uniformemente acelerado. La bola alcanza la altura del borde de la papelera, $y = 0{,}5$ m, en un tiempo t:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \rightarrow 0{,}5\text{ m} = 1{,}15\text{ m} + 1\text{ m/s}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4{,}9\cdot t^2 - t - 0{,}65 = 0 \rightarrow t = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 4{,}9\cdot(-0{,}65)}}{2\cdot 4{,}9}$$

La solución positiva es $t = 0{,}48$ s. En ese tiempo la bola se traslada horizontalmente con movimiento uniforme una distancia:

$$x = x_0 + v_{0x}\cdot t \rightarrow x = 0\text{ m} + 1{,}73\text{ m/s}\cdot 0{,}48\text{ s} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0{,}83\text{ m} = 83\text{ cm}$$

Como el diámetro de la papelera es de 20 cm, la papelera (el punto más cercano a Laura) puede estar a una distancia de Laura desde 63 cm hasta 83 cm.

b) Para determinar el vector velocidad del momento de llegada hay que calcular cada una de sus componentes.

La componente horizontal es $v_x = 1{,}73$ m/s porque el movimiento en esa dirección es uniforme y la velocidad permanece constante.

La componente vertical se calcula recordando que en esa dirección el movimiento es uniformemente acelerado:

$$v_y = v_{0y} - g\cdot t = 1\text{ m/s} - 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot 0{,}48\text{ s} = -3{,}70\text{ m/s (signo negativo porque la bola cae).}$$

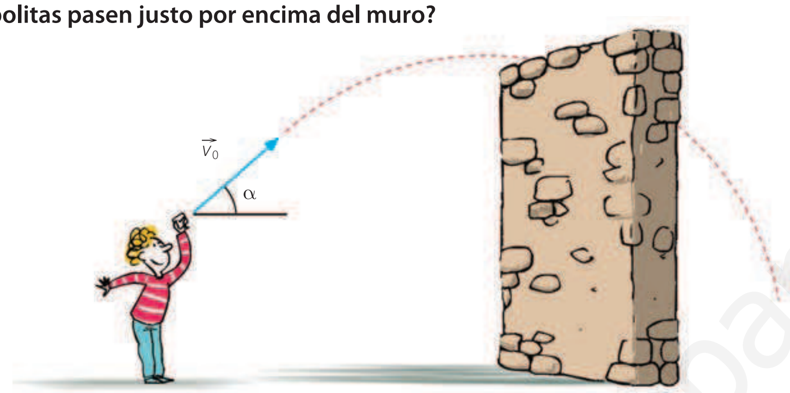
Por tanto:

$$\vec{v} = (1{,}73\,,-3{,}70)\text{ m/s} \rightarrow |\vec{v}\,| = \sqrt{1{,}73^2 + (-3{,}70)^2} = 4{,}08\text{ m/s}$$

TIRO PARABÓLICO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

17 **Un niño juega a lanzar bolitas de papel por encima de un muro de 3 m de alto. Si el niño lanza desde 1 m de altura con una velocidad de 10 m/s y está situado a 4 m del muro, ¿con qué ángulo debe lanzar para que las bolitas pasen justo por encima del muro?**



SOLUCIÓN

El sistema de referencia se fija en el suelo a los pies del niño.

Entonces la altura inicial de la bolita de papel es $y_0 = 1$ m, el muro está en $x_1 = 4$ m y se busca un ángulo inicial de lanzamiento, α, que asegure que la bolita supera la altura del muro: $y_1 = 3$ m.

La componente horizontal del movimiento de la bolita de papel es un movimiento uniforme con velocidad:

$$v_{0x} = v \cdot \cos\alpha = 10 \text{ m/s} \cdot \cos\alpha$$

Entonces:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 4 \text{ m} = 0 + 10 \text{ m/s} \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Despejamos el tiempo (en segundos) que tarda la bolita de papel en llegar al muro en función del ángulo de lanzamiento:

$$t = \frac{2}{5 \cdot \cos\alpha}$$

La componente vertical del movimiento de la bolita de papel es un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial $v_{0y} = v_y \cdot \text{sen}\,\alpha = 10 \cdot \text{sen}\,\alpha$, y con la aceleración de la gravedad contraria al sentido positivo de la referencia:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \text{ m} = 1 \text{ m} + 10 \text{ m/s} \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Sustituyendo el tiempo que tarda la piedra en llegar:

$$3 = 1 + 10 \cdot \frac{2 \cdot \text{sen}\,\alpha}{5 \cdot \cos\alpha} \cdot t - 4{,}9 \cdot \frac{4}{25 \cdot \cos^2\alpha}$$

Y como:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\,\alpha$$

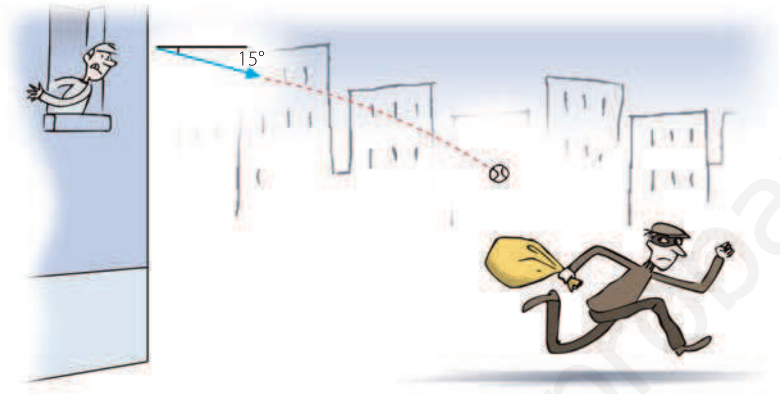
Se tiene:

$$0 = -2 + 4 \cdot \text{tg}\,\alpha - 0{,}784 \cdot (1 + \text{tg}^2\,\alpha) \rightarrow 0{,}784 \cdot \text{tg}^2\,\alpha - 4 \cdot \text{tg}\,\alpha + 2{,}784 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación son los valores para la tangente del ángulo 0,83 y 4,27, que corresponden a los ángulos de 39° 42′ y 76° 49′. Para esos ángulos de lanzamiento la bolita de papel pasa justo por encima del muro. Para ángulos situados entre ellos ($40° \leq \alpha \leq 77°$) la bolita supera con holgura el obstáculo.

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

18 **Desde la ventana de su casa Luis ve cómo un ladrón se aleja corriendo a una velocidad de 2 m/s. Dispuesto a detenerlo como sea, agarra una pelota de béisbol y la lanza hacia abajo con un ángulo de 15° bajo la horizontal en el instante en que el ladrón está a 10 m de la base de su casa. ¿Qué velocidad debe dar Luis a la pelota para que impacte en la cabeza del ladrón? Datos: altura del ladrón: 180 cm; altura a la que está la ventana de Luis: 15 m.**



SOLUCIÓN

Consideramos como instante inicial, $t_0 = 0$ s, el momento en que Luis lanza la pelota de béisbol, y llamaremos t_1 al momento en que la pelota impacta en la cabeza del ladrón. En ese tiempo t_1 el ladrón habrá recorrido con velocidad constante de 2 m/s una distancia de $(2\,t_1)$ m y estará alejado de la casa un total de $(10 + 2\,t_1)$ m.

En el sistema de referencia fijado al pie de la casa la pelota de béisbol tiene componente para el vector de posición inicial: $x_0 = 0$ m, $y_0 = 15$ m; y componentes para el vector de posición final:

$$x_1 = (12 + 2\,t_1)\text{ m};\ y_1 = 1{,}8\text{ m}$$

Además, las componentes del vector velocidad son:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 15°;\ \ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } 15°$$

Como la componente horizontal del movimiento de la pelota es uniforme:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t_1 \rightarrow 12 + 2\,t_1 = 0 + v_0 \cdot \cos 15° \cdot t_1$$

Además, la componente vertical del movimiento es uniformemente acelerado con la aceleración de la gravedad en sentido negativo:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \rightarrow 1{,}8 = 15 + v_0 \cdot \text{sen } 15° \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t_1^2$$

Tenemos, pues, dos ecuaciones para calcular las incógnitas t_1 y v_0:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = (0{,}97 \cdot v_0 - 2) \cdot t_1 \\ 13{,}2 = -0{,}26 \cdot v_0 \cdot t_1 + 4{,}9 \cdot t_1^2 \end{array}\right\}$$

Despejando en la primera ecuación el tiempo y sustituyendo en la otra se obtiene una ecuación para la velocidad de lanzamiento:

$$13{,}2 = -0{,}26 \cdot v_0 \cdot \frac{12}{0{,}97 \cdot v_0 - 2} + 4{,}9 \cdot \frac{144}{(0{,}97 \cdot v_0 - 2)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 13{,}2 \cdot (0{,}97 \cdot v_0 - 2)^2 + 0{,}26 \cdot v_0 \cdot 12 \cdot (0{,}97 \cdot v_0 - 2) - 4{,}9 \cdot 144 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 15{,}45 \cdot v_0^2 + 2{,}33 \cdot v_0 - 652{,}8 = 0 \rightarrow$$

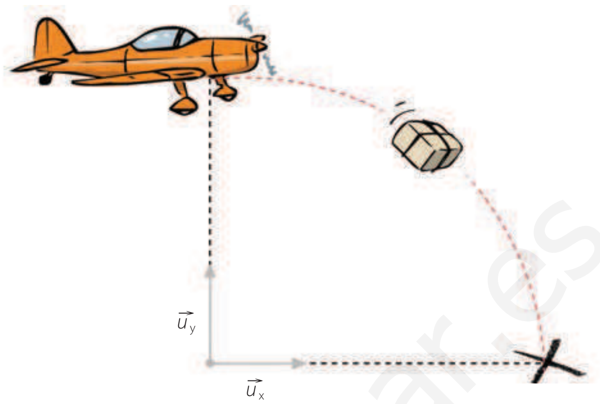
$$\rightarrow v_0 = \frac{-2{,}33 \pm \sqrt{2{,}33^2 - 4 \cdot 15{,}45 \cdot (-652{,}8)}}{2 \cdot 15{,}45}$$

La solución negativa se descarta; por tanto, Luis debe lanzar la pelota con velocidad inicial de 6,43 m/s^2.

TIRO PARABÓLICO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

19 **Una avioneta vuela a 500 m de altura con una velocidad de 130 m/s. ¿A qué distancia en horizontal de una marca dibujada en el suelo debe soltar un paquete para que este caiga exactamente sobre la marca?**



SOLUCIÓN

El sistema de referencia se fija en el suelo en el punto en el que se suelta el paquete. Así, las coordenadas de la posición inicial del móvil son $x_0 = 4$ m, $y_0 = 500$ m. Además, como el paquete se deja caer, su velocidad de lanzamiento coincide con la de la avioneta: $v_{0x} = 130$ m/s; $v_{0y} = 0$ m/s.

El movimiento vertical es uniformemente acelerado con la aceleración de la gravedad con sentido negativo:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 500 \text{ m} + 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Así que tarda 10,10 s en caer. Y en ese tiempo el paquete avanza horizontalmente con movimiento uniforme un espacio:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow x_1 = 0 + 130 \text{ m/s} \cdot 10{,}10 \text{ s} \rightarrow x_1 = 1313 \text{ m}$$

El paquete debe lanzarse cuando la vertical de la avioneta esté a 1313 m del objetivo.

20 **Una atleta de élite lanza la jabalina con un ángulo de 45° alcanzando la marca de 70 m de distancia al punto de lanzamiento.**

SOLUCIÓN

a) ¿Cuál fue la velocidad de salida de la jabalina?

La atleta tiene un buen conocimiento del tiro parabólico y lanza la jabalina con el ángulo de máximo alcance. La diferencia entre un recorrido mayor o menor la da la velocidad inicial que confiere la atleta a la jabalina.

Suponemos que la atleta se inclina para arrojar la jabalina de manera que esta sale prácticamente del suelo, $x_0 = 0$ m, $y_0 = 0$. Además, la jabalina se clava en la marca de 70 m, $x_1 = 70$ m, $y_1 = 0$ m. La velocidad inicial se reparte igualmente entre sus componentes, puesto que el ángulo de salida es 45°:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 45° = 0{,}71 \cdot v_0$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen } 45° = 0{,}71 \cdot v_0$$

Entonces se pueden utilizar las ecuaciones de la componente horizontal, de movimiento uniforme, para despejar el tiempo en función de la velocidad inicial:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 70 \text{ m} = 0 \text{ m} + 0{,}71 \cdot v_0 \cdot t \rightarrow t = \frac{70 \text{ m}}{0{,}71 \cdot v_0}$$

Y sustituir en las ecuaciones para la componente vertical:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow 0 = 0 + 0{,}71 \cdot v_0 \cdot \underbrace{\frac{70}{0{,}71 \cdot v_0}}_{t} - 4{,}9 \cdot \underbrace{\frac{70^2}{(0{,}71 \cdot v_0)^2}}_{t^2} \rightarrow 70 = 4{,}9 \cdot \frac{70^2}{0{,}71^2 \cdot v_0^2}$$

Y obtener así la velocidad de salida de la jabalina, $v_0 = 26{,}08$ m/s.

continúa →

NOMBRE: CURSO: FECHA:

b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada?

La altura máxima se alcanza en el momento en que la componente vertical de la velocidad se anula:

$$v = v_{0y} - g \cdot t \rightarrow 0 = 0{,}71 \cdot 26{,}08 \text{ m/s} - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot t \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 1{,}88 \text{ s}$$

En ese instante, la altura alcanzada es:

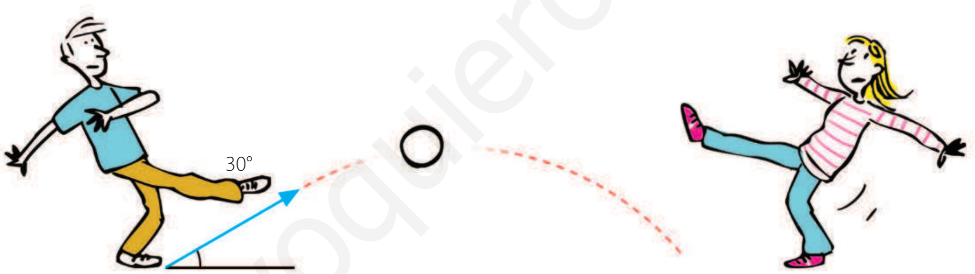
$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 0 + 0{,}71 \cdot 26{,}08 \text{ m/s} \cdot 1{,}88 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}88^2 \text{ s}^2 = 17{,}49 \text{ m}$$

c) ¿Cuánto tardó en caer al suelo?

Como el movimiento es simétrico, tarda el doble de tiempo en caer al suelo que en alcanzar la altura máxima, es decir, 3,76 s.

21 Mario golpea el balón con el pie para lanzárselo a Tamara que está situada a 18 m de distancia. El ángulo de salida del balón es de 30° sobre la horizontal y la velocidad a la que sale el balón de la bota de Mario es de 15 m/s. ¿A qué altura deberá poner el pie Tamara para hacer el control de la pelota que le envía Mario?

SOLUCIÓN



Fijamos el sistema de referencia en el pie de Mario. El vector posición inicial del balón es $(x_0 , y_0) = (0 , 0)$ m, y del vector de posición final solo conocemos la componente horizontal $x_1 = 18$ m.
El vector velocidad inicial se calcula a partir del módulo y del ángulo de lanzamiento:

$$(v_{0x} , v_{0y}) = (15 \cdot \cos 30° , 15 \cdot \text{sen } 30°) = (13{,}0 , 7{,}5) \text{ m/s}$$

Para averiguar la altura a la que llega el balón calculamos primero el tiempo que tarda en llegar a Tamara.
La componente horizontal de movimiento tiene velocidad constante $v_{0x} = 13{,}0$ m/s:

$$x_1 = x_0 + v_{0x} \cdot t \rightarrow 18 \text{ m} = 0 + 13{,}0 \text{ m/s} \cdot t \rightarrow t = 1{,}38 \text{ s}$$

La componente vertical del movimiento es uniformemente acelerada con aceleración en sentido negativo en el sistema de referencia elegido:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y_1 = 0 + 7{,}5 \text{ m/s} \cdot 1{,}38 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}38^2 \text{ s} \rightarrow y_1 = 1{,}02 \text{ m}$$

Tamara tiene que elevar el pie hasta 1 m y 2 cm de altura.